



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

FABIO DE ANDRADE PONTES

**SOLUÇÕES HÍBRIDAS POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS
PARA O ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO COM
TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CANAIS DE PLACAS
PARALELAS**

BELÉM - PA
JUNHO 2015

FABIO DE ANDRADE PONTES

SOLUÇÕES HÍBRIDAS POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS PARA O
ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO COM TRANSFERÊNCIA
DE CALOR EM CANAIS DE PLACAS PARALELAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química (PPGEQ) da Universidade Federal do Pará (UFPA) como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Química.
Área de concentração: Desenvolvimento de Processos.

Orientador: Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma.

BELÉM-PA
2015

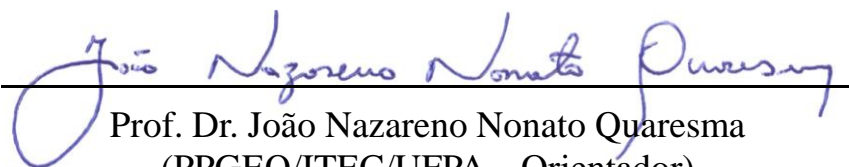
**SOLUÇÕES HÍBRIDAS POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS PARA O
ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO COM TRANSFERÊNCIA DE
CALOR EM CANAIS DE PLACAS PARALELAS**

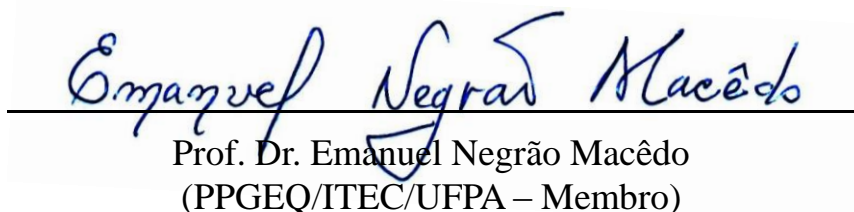
FABIO DE ANDRADE PONTES

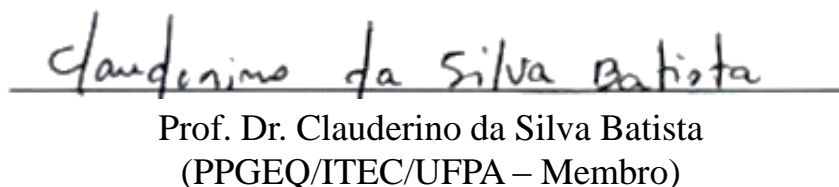
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA (PPGEQ) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ (UFPA) COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA QUÍMICA.

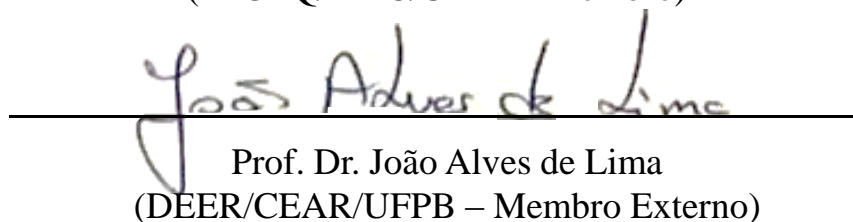
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: DESENVOLVIMENTO DE PROCESSOS.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
(PPGEQ/ITEC/UFPA – Orientador)


Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo
(PPGEQ/ITEC/UFPA – Membro)


Prof. Dr. Clauderino da Silva Batista
(PPGEQ/ITEC/UFPA – Membro)


Prof. Dr. João Alves de Lima
(DEER/CEAR/UFPB – Membro Externo)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para sua realização.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente tenho que agradecer a Deus, por me tornar a cada dia uma pessoa melhor e por manter sempre meus sonhos e objetivos vivos. Sou grato a Deus por me permitir continuar sonhando e por permitir que eu consiga realizar meus sonhos, pois os mesmos são combustível do sucesso. Agradeço pelas oportunidades e pelas bênçãos que sempre recebi na minha vida. Pelas vitórias alcançadas com muito esforço, mas que sem fé não representariam nada.

Agradeço à minha família, em especial aos meus primos e tios que sempre estiveram presentes nas minhas conquistas. Destaco aqui a gratidão especial que dedico a minha mãe, Marília Pontes, pelo imenso apoio neste caminho. Ela constitui a razão maior da minha força nesta caminhada e sempre foi minha maior motivadora para realização dos meus objetivos. Sou grato por toda a paciência, amor, orientação e até pelos momentos em que foi dura, pois me tornaram um homem e contribuíram para o meu sucesso.

Ao Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma, ao Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo e ao Prof. Dr. Clauderino da Silva Batista pela confiança em mim depositada e por todos os ensinamentos que me passaram durante minha trajetória acadêmica. Muito obrigado pelas oportunidades que me deram e pelo apoio, sempre incondicionais.

Ao Prof. Dr. João Alves de Lima pela disponibilidade em aceitar o convite para fazer parte desta banca, o que, certamente, contribuirá na discussão e no enriquecimento deste trabalho.

Aos professores e funcionários da Faculdade de Engenharia Química e do Instituto de Tecnologia, pelo auxílio em diversos momentos da minha trajetória no curso.

Aos amigos da UFPA que de alguma forma contribuíram para realização deste trabalho. Aqui, quero agradecer especialmente aos meus colegas de turma, engenharia química 2008, uma verdadeira família, pela união, por tornarem minha caminhada mais fácil e por fazerem destes sete anos os mais prazerosos da minha vida. Um agradecimento especial aos amigos Luana Grangeiro, Michele Duarte, Darllan Pinheiro e Luiz Felipe Pereira por sempre estarem presentes nas minhas vitórias nesta caminhada.

Aos colegas do grupo de pesquisa GFTA - UFPA que, principalmente nos últimos anos, se mostraram grandes amigos, sempre disponíveis em ajudar e compartilhar todos os momentos, bons e ruins. Obrigado Elenilson Cabral, Helder Miyagawa, Igor Coimbra, Fernanda Santos e Péricles Pontes.

Agradeço aos amigos Orleânia Sales, Clayton Silva, Loren Moura e Marla Verissimo, pelo incondicional apoio e pelas palavras de incentivo, principalmente nos momentos em que eu mais precisei de força.

**“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível.”**

Charles Chaplin

RESUMO

O presente estudo consiste em analisar a dinâmica do escoamento magnetohidrodinâmico de fluidos newtonianos condutores elétricos no interior de um canal de placas planas paralelas submetido a um campo magnético externo uniforme, em que a formulação matemática dos modelos é dada em termos de função corrente, obtida a partir das Equações de Navier-Stokes e da Equação da Energia. As suposições adotadas são de regime permanente, escoamento laminar e incompressível e propriedades físicas constantes. Admite-se também que o campo magnético externo, aplicado na direção normal ao escoamento, permanece uniforme, não sendo, dessa forma, influenciado por nenhum efeito magnético interno. Para a solução das equações governantes do problema físico, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é aplicada a este sistema de equações diferenciais parciais e uma solução híbrida (numérico-analítica), a qual é computacionalmente implementada utilizando-se a linguagem de programação científica FORTRAN 90. Com o objetivo de ilustrar a consistência da técnica da transformação integral, análises de convergência são efetuadas e apresentadas. Resultados para os campos de velocidade e de temperatura, bem como potenciais correlatos são gerados e comparados com os da literatura em função dos principais parâmetros de governo. Uma análise aprofundada sobre a sensibilidade paramétrica dos principais parâmetros adimensionais, tais como número de Reynolds, número de Hartmann, número de Eckert, parâmetro elétrico e número de Prandtl, para algumas situações típicas é realizada.

Palavras-chave: Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), Equações de Navier-Stokes, Magnetohidrodinâmica (MHD), Transferência de Calor, Canais de Placas Paralelas.

ABSTRACT

The present study is to analyze the dynamics of the magnetohydrodynamic flow of electrical conductors newtonian fluids within a parallel flat plate channel subjected to a uniform external magnetic field, wherein the mathematical formulation of the model is given in terms of stream-function, obtained from the Navier-Stokes equations and the Energy Equation. The adopted assumptions are steady state, laminar and incompressible flow and constant physical properties. It is also admitted that the external magnetic field applied in the normal direction of flow remains uniform, not being thus influenced by any internal magnetic effect. For the solution of the governing equations, the Generalized Integral Transform Technique (GITT) is applied to this system of partial differential equations and a hybrid solution (numerical and analytical), which is computationally implemented using the programming scientific language FORTRAN 90. In order to illustrate the consistency of the integral transformation, convergence analysis is performed and presented. Results for velocity and temperature fields as well as potential correlates are generated and compared with the literature on the basis of the main parameters of government. An in-depth analysis of parametric sensitivity of the main dimensionless parameters such as the Reynolds number, Hartmann number, Eckert number, electric parameter and Prandtl number for some typical situations is performed.

Keywords: Generalized Integral Transform Technique (GITT), Navier-Stokes Equations, Magnetohydrodynamics (MHD), Heat Transfer, Parallel Plates Channels.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema (a) de uma bomba eletromagnética e (b) do confinamento magnético de plasma. Fonte: Adaptado de Rêgo (2009).....	9
Figura 2.2	Esquema (a) de agitação magnética de um lingote, (b) do amortecimento magnético de movimento durante fundição e (c) de uma válvula eletromagnética. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).....	10
Figura 2.3	Instabilidade em uma célula de redução de alumínio. Fonte: Adaptado de Davidson (2001)	11
Figura 2.4	Interação entre um campo magnético e um fio circular em movimento. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).....	12
Figura 2.5	Lei de Ohm em um condutor (a) estacionário e (b) em movimento. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).....	17
Figura 2.6	Lei de Ampère aplicada a um fio. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).....	17
Figura 2.7	Lei de Faraday (a) FEM gerada pelo movimento de um condutor, (b) FEM gerada por um campo magnético dependente do tempo. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).....	19
Figura 3.1	Modelo físico conceitual do escoamento MHD em placas paralelas com transferência de calor.....	33
Figura 5.1	Comparação com os resultados de Manohar (1966) e Rêgo (2010) da componente axial de velocidade ao longo do canal, em diferentes posições transversais, para $Re = 100$ e $Ha = 4$ (CASO IV).....	55
Figura 5.2	Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 100$ e $Ha = 4$ (CASO IV).....	55
Figura 5.3	Comparação com os resultados de Hwang e Fan (1963) e Manohar (1966) da componente axial de velocidade ao longo do canal, em diferentes posições transversais, para $Re = 300$ e $Ha = 10$ (CASO I).....	56
Figura 5.4	Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 300$ e $Ha = 10$ (CASO I).....	56
Figura 5.5	Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 40$ e $Ha = 50$ (CASO V).....	57
Figura 5.6	Influência do número de Reynolds no campo de velocidade - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).....	58

Figura 5.7	Influência do número de Reynolds no desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).....	59
Figura 5.8	Perfil de velocidade para o CASO III ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	59
Figura 5.9	Perfil de velocidade para o CASO VI ($Re = 100$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	59
Figura 5.10	Perfil de velocidade para o CASO I ($Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	60
Figura 5.11	Influência do número de Reynolds no campo de temperatura - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).....	61
Figura 5.12	Influência do número de Reynolds no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).....	61
Figura 5.13	Perfil de temperatura para o CASO III ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	62
Figura 5.14	Perfil de temperatura para o CASO VI ($Re = 100$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	62
Figura 5.15	Perfil de temperatura para o CASO I ($Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).....	62
Figura 5.16	Influência do número de Hartmann no campo de velocidade - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).....	63
Figura 5.17	Influência do número de Hartmann no desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).....	64
Figura 5.18	Perfil de velocidade para o CASO VII ($Re = 40$; $Ha = 4$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	64
Figura 5.19	Perfil de velocidade para o CASO II ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	64
Figura 5.20	Perfil de velocidade para o CASO V ($Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	65
Figura 5.21	Influência do número de Hartmann no campo de temperatura - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).....	66
Figura 5.22	Influência do número de Hartmann no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).....	66
Figura 5.23	Perfil de temperatura para o CASO VII ($Re = 40$; $Ha = 4$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	67
Figura 5.24	Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	67
Figura 5.25	Perfil de temperatura para o CASO V ($Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w21} = 0,0$).....	67

Figura 5.26	Perfil de velocidade para: CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).....	68
Figura 5.27	Influência do número de Eckert no campo de temperatura - CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).....	69
Figura 5.28	Influência do número de Eckert no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).....	69
Figura 5.29	Perfil de temperatura para o CASO IV ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,0$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	70
Figura 5.30	Perfil de temperatura para o CASO IX ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	70
Figura 5.31	Perfil de temperatura para o CASO X ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	70
Figura 5.32	Perfil de velocidade para: CASO II ($E_0 = -10$), CASO III – ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).....	71
Figura 5.33	Influência do número de parâmetro elétrico no campo de temperatura - CASO II ($E_0 = -10$), CASO III – ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).....	72
Figura 5.34	Influência do número de parâmetro elétrico no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO II – ($E_0 = -10$), CASO III – ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).....	72
Figura 5.35	Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	73
Figura 5.36	Perfil de temperatura para o CASO III ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	73
Figura 5.37	Perfil de temperatura para o CASO XI ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	73
Figura 5.38	Perfil de temperatura para o CASO XII ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 1$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	74
Figura 5.39	Perfil de velocidade para: CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).....	75
Figura 5.40	Influência do número de número de Prandtl no campo de temperatura - CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).....	75
Figura 5.41	Influência do número de número de Prandtl no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).....	76

Figura 5.42	Perfil de temperatura para o CASO VIII ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,1$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	76
Figura 5.43	Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).....	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Lista de casos rodados com os valores dos parâmetros utilizados.....	49
Tabela 5.2	Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO I - $Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$	50
Tabela 5.3	Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO II - $Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$	51
Tabela 5.4	Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO III - $Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$	52
Tabela 5.5	Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO IV - $Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,0$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$	53
Tabela 5.6	Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO V - $Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$	54

NOMENCLATURA

C_p	Calor Específico a pressão constante.
P	Campo de Pressão.
B_0	Campo Magnético constante aplicado externamente.
E_0	Campo Elétrico constante aplicado externamente.
E_i	Campo Elétrico Induzido.
E_r	Campo Eletrostático.
$T(x,y)$	Campo Escalar de Temperatura do Fluido.
q	Carga do Elétron.
$f_m(x)$	Coefficiente de Atrito Médio Local
$u(x,y)$	Componente Longitudinal da Velocidade do Fluido.
$v(x,y)$	Componente Transversal da Velocidade do Fluido.
k	Condutividade Térmica.
x, y	Coordenas espaciais adimensionais.
ℓ	Escala característica de comprimento.
$d\vec{\ell}$	Elemento diferencial de comprimento.
$d\vec{S}$	Elemento diferencial de área/superfície.
M_i	Integral de normalização da Autofunção associada a Função Corrente.
N_i	Integral de normalização da Autofunção associada a Temperatura.
Ec	Número de Eckert.
Ha	Número de Hartmann.
$Nu_m(x)$	Número de Nusselt Médio Local.
Nu_1	Número de Nusselt na placa inferior.
Nu_2	Número de Nusselt na placa superior.
Pr	Número de Prandlt.
Re_m	Número de Reynolds Magnético.
Re	Número de Reynolds.
NV	Ordem de truncamento para as expansões do campo de função corrente.
NT	Ordem de truncamento para as expansões do campo de temperatura.
E_0	Parâmetro Elétrico Adimensional.
N	Parâmetro de Interação Magnética.
T_{w2l}	Relação entre as Temperaturas nas paredes do canal.
$T_b(x)$	Temperatura Média de Mistura Local.
T_{w1}	Temperatura na parede inferior do canal.
T_{w2}	Temperatura na parede superior do canal.
\vec{B}	Vetor Campo Magnético.
\vec{U}	Velocidade Média do Fluido na entrada do canal.
\vec{J}	Vetor Densidade de Corrente Elétrica.
\vec{F}	Vetor Força de Lorentz.
v_a	Velocidade de Alfvèn.

Letras Gregas

ϕ_i	Autofunção relacionada ao Campo de Função Corrente.
Γ_i	Autofunção relacionada ao Campo de Temperatura.
$\tilde{\phi}_i$	Autofunção Normalizada relacionada ao Campo de Função Corrente.
$\tilde{\Gamma}_i$	Autofunção Normalizada relacionada ao Campo de Temperatura.
α_i	Autovalor relacionada ao Campo de Função Corrente.
μ_i	Autovalor relacionada ao Campo de Temperatura.
$\bar{\Psi}_i(x)$	Campo de Função Corrente Filtrado e Transformado.
$\Psi_F(x, y)$	Campo de Função Corrente Filtrado.
$\bar{T}_i(x)$	Campo Escalar de Temperatura Filtrado e Transformado.
$T_F(x, y)$	Campo Escalar de Temperatura Filtrado.
σ	Condutividade Elétrica do Fluido.
λ_m	Difusividade Magnética.
α	Difusividade Térmica.
$\Psi_\infty(y)$	Filtro Relacionado ao Campo de Função Corrente.
$T_f(y)$	Filtro Relacionado ao Campo de Temperatura.
ρ	Massa Específica do Fluido.
ϵ_0	Permissividade do Espaço Livre.
τ	Tempo de Amortecimento Magnético.
μ	Viscosidade Dinâmica/Absoluta do Fluido.

Índices subscritos e sobrescritos

*	Variáveis adimensionais
i, j, k	Ordem dos autovalores

Símbolos Matemáticos

∇^2	Laplaciano
∇^4	Operador biharmônico
\sum	Somatório

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 JUSTIFICATIVA.....	2
1.3 OBJETIVOS.....	3
1.3.1 Objetivo Geral	3
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 SÍNTESE DO TRABALHO.....	4

CAPÍTULO II

2 REVISÃO DA LITERATURA	6
2.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA.....	6
2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA EM MHD.....	11
2.2.1 Conceitos Básicos	11
2.2.2 Equações do Eletromagnetismo	14
2.2.2.1 Campo Elétrico e Forças de Lorentz	15
2.2.2.2 Lei de Ohm e Força de Lorentz Volumétrica	16
2.2.2.3 Lei de Ampère	17
2.2.2.4 Lei de Faraday	18
2.2.2.5 Conservação de Carga	19
2.2.2.6 Equação de Transporte do Campo Magnético	22
2.2.3 Equações de Navier-Stokes e a Força de Lorentz	23
2.2.3.1 Tensões de Maxwell	24
2.2.4 Equação da Energia	25
2.3 MHD EM CANAIS.....	25
2.4 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA - GITT.....	28

CAPÍTULO III

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	33
3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO.....	33
3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	34

3.2.1 Desenvolvimento do Campo de Função Corrente.....	34
3.2.2 Condições de Contorno de Função Corrente para x e para y.....	35
3.2.3 Desenvolvimento do Campo de Temperatura.....	36
3.2.4 Condições de Contorno do Campo de Temperatura para x e para y.....	37
 CAPÍTULO IV	
4 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	38
4.1 FILTRAGEM DO PROBLEMA.....	38
4.1.1 Campo de Função Corrente.....	39
4.1.2 Campo de Temperatura.....	39
4.1.3 Condições de Contorno.....	40
4.2. TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL.....	41
4.2.1 Escolha do Problema de Autovalor.....	41
4.2.1.1 Campo de Função Corrente.....	41
4.2.1.2 Campo de Temperatura.....	42
4.2.2 Determinação do par Transformada-Inversa.....	43
4.2.2.1 Campo de Função Corrente.....	43
4.2.2.2 Campo de Temperatura.....	43
4.4.3 Transformação Integral da EDP Original.....	44
4.2.3.1 Campo de Função Corrente.....	44
4.2.3.2 Campo de Temperatura.....	45
4.2.3.3 Condições de Contorno.....	45
4.2.4 Implementação Computacional.....	46
4.2.5 Recuperação dos Principais Campos.....	47
 CAPÍTULO V	
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	48
5.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA.....	49
5.2 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA.....	55
5.3 SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA.....	57
5.3.1 Influência do número de Reynolds.....	58
5.3.1.1 Campo de velocidade.....	58
5.3.1.2 Campo de temperatura.....	61
5.3.2 Influência do número de Hartmann.....	63

5.3.2.1 Campo de velocidade.....	63
5.3.2.2 Campo de temperatura.....	66
5.3.3 Influência do número de Eckert.....	68
5.3.3.1 Campo de temperatura.....	69
5.3.4 Influência do parâmetro elétrico.....	71
5.3.4.1 Campo de temperatura.....	72
5.3.5 Influência do número de Prandtl.....	75
5.3.5.1 Campo de temperatura.....	75
CAPÍTULO VI	
6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80
ANEXO A - CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE COMPLETAMENTE	
DESENVOLVIDO.....	85
ANEXO B - CAMPO DE TEMPERATURA TERMICAMENTE	
DESENVOLVIDO.....	90
ANEXO C - PRINCIPAIS PARÂMETROS DE COMPARAÇÃO.....	92

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Frequentemente, na indústria, os campos magnéticos são aplicados para aquecer, bombear, agitar e levitar metais líquidos, uma vez que os mesmos influenciam muitos escoamentos naturais e artificiais. Por outro lado, tem-se conhecimento da existência do campo magnético terrestre, mantido pelo movimento do fluido no núcleo da terra, do campo magnético solar, o qual gera manchas e chamas solares, bem como do campo magnético galáctico, que é atribuído à formação de estrelas a partir de nuvens solares. Nesse contexto, a ciência responsável por estudar estes escoamentos é denominada magnetohidrodinâmica (MHD), a qual está voltada para a interação mútua entre os campos magnéticos e o escoamento de fluidos, que devem ser eletricamente condutores e não-magnéticos, limitando-se a metais líquidos, gases quentes ionizados (plasmas) e eletrólitos fortes (HIDE e ROBERTS, 1962).

A MHD foi originalmente aplicada a problemas astrofísicos e geofísicos, onde ainda é muito importante. Mais recentemente é empregada para o problema da energia de fusão, em que a aplicação é a criação e contenção de plasmas quentes por forças eletromagnéticas, uma vez que as paredes de material seriam destruídas pelo contato. Os problemas astrofísicos incluem a estrutura solar, especialmente nas camadas mais externas, o vento solar banhando a Terra e outros planetas, e os campos magnéticos interestelares. O principal problema geofísico é o magnetismo planetário, o qual é produzido por correntes nas profundezas do planeta (COWLING, 1957).

Importantes aplicações industriais atuais sob as mais variadas formas e situações baseiam-se no fenômeno do escoamento (laminar ou turbulento) e a transferência de calor envolvendo fluidos condutores elétricos (não magnéticos) submetidos a campos magnéticos externos (MHD), como por exemplo, no desenvolvimento de bombas e geradores magnetohidrodinâmicos, no resfriamento de reatores nucleares, e mais fortemente nas indústrias de alumínio (células de redução de alumínio) e siderúrgicas. Estudos sobre a magnetohidrodinâmica aplicada à engenharia, iniciados no começo do século XX, foram retomados nos anos 60, tendo ganhado, atualmente, forte atenção devido principalmente às necessidades energéticas e ambientais, tornando-se, conseqüentemente, o objeto de muitas investigações científicas (SHERCLIFF, 1965; DAVIDSON, 2001; SUTTON e SHERMAN, 2006).

O estudo realizado no presente trabalho é direcionado à determinação do campo de velocidade e do campo de temperatura no interior de um canal formado por placas planas e paralelas (desenvolvimento hidrodinâmico e térmico), considerando o escoamento laminar, de um fluido condutor elétrico sob a influência de um campo magnético transversal constante.

Destaca-se que em trabalhos anteriores, foram desenvolvidos os modelos hidrodinâmico e térmico para a região de entrada com uma formulação de camada limite neste mesmo problema, não sendo desenvolvidas e resolvidas as equações de Navier-Stokes e de Energia simultaneamente, o que é justamente o foco deste trabalho.

1.2 JUSTIFICATIVA

Embora a MHD baseie-se nas equações da hidrodinâmica clássica e eletromagnetismo, poucas investigações mais dedicadas tinham sido realizadas neste campo até a década de 60. Isto porque o parâmetro que mede a força de acoplamento entre o campo magnético e o escoamento de fluidos, o chamado número de Reynolds magnético é muito pequeno para valores mais práticos de L , U e $\sigma\mu$, de onde resulta que fenômenos hidromagnéticos não podem ser facilmente produzidos em laboratório. Por outro lado, devido à grande escala de comprimento associada com fenômenos cósmicos, mesmo os fluidos com propriedades ligadas a condutividade mais fracas que se deslocam muito lentamente estão fortemente acoplados a qualquer campo magnético presente (HIDE e ROBERTS, 1962).

Ao mesmo tempo, o desenvolvimento do uso e aplicação de métodos numéricos na solução de modelos de escoamento dos mais diversos campos das ciências, tem ganhado cada vez mais espaço na comunidade científica e tecnológica. Recentemente, os métodos de volumes finitos e elementos finitos compõem a base das metodologias numéricas aplicadas nos núcleos de cálculo dos “*softwares*” atuais encontrados nas áreas de dinâmica dos fluidos computacional e de análise estrutural computacional (RÊGO, 2010).

Em contrapartida, a necessidade do desenvolvimento e aplicação de metodologias matemáticas que conservem uma natureza mais analítica possível na obtenção da solução de modelos dos mais variados campos da ciência se mantém como meta científica. Em meio as metodologias que satisfazem tal condição, pelo menos parcialmente, apresenta-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (do inglês *Generalized Integral Transform Technique* GITT), a qual é uma metodologia híbrida, numérico-analítica, que vem sendo desenvolvida de forma paralela aos métodos puramente numéricos, e que mantém, na sua aplicação, todas as características de uma solução analítica, como o método de separação de variáveis, associada,

por outro lado, à capacidade de solução de problemas complexos dos métodos puramente numéricos para a resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Neste contexto, levando em conta a natureza híbrida da GITT e sua garantia de controle de erro local e global, destaca-se como contribuição do presente trabalho a aplicação de tal metodologia na solução dos modelos matemáticos elípticos em termos de campo de função corrente e de temperatura de forma simultânea que regem tal escoamento em estado estacionário, bidimensional, de um líquido viscoso, homogêneo e incompressível com valores finitos de propriedades físicas, obtidos a partir das equações de Navier-Stokes, das leis do Eletromagnetismo e do balanço de energia, em função da capacidade da técnica na solução de problemas complexos a partir dos resultados apresentados em diversos outros trabalhos, reafirmando a aplicação da metodologia como uma ferramenta apropriada para fins de verificação numérica (“*benchmarking*”) neste campo de pesquisa.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste estudo consiste em analisar, através da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), a dinâmica do escoamento magnetohidrodinâmico com transferência de calor em fluidos newtonianos condutores elétricos submetidos a campos magnéticos transversais constantes no interior de um canal de placas planas e paralelas.

1.3.2 Objetivos Específicos

Partindo-se da discussão levantada neste capítulo são definidos os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um modelo matemático para o escoamento magnetohidrodinâmico fundamentado nas Equações de Navier-Stokes e na Equação de Energia;
- Aplicar a GITT na solução do modelo de equações diferenciais parciais obtido;
- Estudar o escoamento MHD em canais de placas paralelas;
- Examinar a influência do campo magnético no processo de transferência de calor e quantidade de movimento no interior de canais de placas paralelas em regime permanente;
- Implementar um programa computacional capaz de solucionar as equações diferenciais obtidas no modelo a partir do uso dessa metodologia;

- Desenvolver uma avaliação referente à influência dos principais parâmetros considerados no modelo (sensibilidade paramétrica);
- Contribuir com a metodologia da GITT, estendendo sua aplicação nessa classe de problemas que envolvam eletromagnetismo.

1.4 SÍNTESE DO TRABALHO

O presente capítulo apresenta a motivação, a justificativa e os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

A seguir, no Capítulo 2, é realizada uma breve descrição dos fundamentos do escoamento de fluidos condutores elétricos (não magnéticos) submetidos a campos magnéticos. Nesse capítulo, são mostradas as equações básicas da eletrodinâmica, os seus parâmetros característicos e a forma de interação entre os campos magnéticos, de escoamento e de temperatura. Em seguida é realizada uma revisão bibliográfica acerca dos trabalhos numéricos e experimentais desenvolvidos anteriormente sobre o estudo da magnetohidrodinâmica em dutos. No final do capítulo, é mostrado ainda o estado da arte de aplicação da técnica da transformada integral generalizada a problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor.

No Capítulo 3 é desenvolvida a formulação matemática do problema, ilustrando-se a geometria estudada e as condições de contorno associadas ao fenômeno físico analisado. O problema é mostrado nas suas formas dimensional e adimensional, e as variáveis adimensionais empregados são definidas. As definições dos principais parâmetros correspondentes aos campos de velocidade e de temperatura são também estabelecidas neste capítulo.

No Capítulo 4 a metodologia de solução empregada nas equações de governo do problema é descrita completamente. O uso da formulação em função corrente, o emprego do processo de “filtragem” numérica dos campos de função corrente e temperatura, o estabelecimento dos problemas de autovalores associados, o desenvolvimento do processo analítico de transformação integral das equações de governo e a recuperação dos potenciais originais são detalhadamente descritos nesse capítulo.

No Capítulo 5 são mostrados, na forma de gráficos e tabelas, os resultados obtidos no presente trabalho com aplicação da GITT. Análises de convergência, verificação numérica dos principais campos do escoamento e uma completa discussão de tais resultados são realizadas neste capítulo. A análise da sensibilidade paramétrica do modelo é realizada a fim de avaliar a influência dos principais parâmetros sobre os campos de velocidade e de temperatura.

Finalmente, no Capítulo 6, são traçadas as conclusões obtidas com o desenvolvimento do presente trabalho e as principais sugestões de continuidade para trabalhos futuros são apresentadas.

As referências bibliográficas empregadas como base e para comparação dos resultados alcançados com o presente trabalho são listadas no final da dissertação.

CAPÍTULO II

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA

A compreensão acerca dos fenômenos básicos envolvidos na magnetohidrodinâmica é possível por meio de uma passagem concisa pelo histórico do desenvolvimento da MHD.

Faraday (1832) e os pesquisadores de sua época tinham conhecimento de que o material sólido ou líquido eletricamente condutor em movimento num campo magnético sofre a ação de uma força eletromotriz. Alternativamente, as correntes podem ser induzidas pela mudança do campo magnético com o tempo.

No fenômeno da MHD existe, essencialmente, a interação mútua entre o campo de velocidade do fluido e o campo eletromagnético, de modo que:

- (I) O movimento do fluido afeta o campo magnético;
- (II) O campo magnético afeta o movimento do fluido.

A denominação MHD surgiu como tentativa de indicar essa relação entre os dois campos da física e outros nomes, como hidromagnetismo, podem ser usados, embora não tenham ganhado muito destaque (SILVA, 2011).

Uma outra particularidade interessante da MHD é a capacidade da força eletromagnética ser às vezes pseudo-viscosa e dissipativa, e outras vezes pseudo-elástica e conservativa, de uma maneira que dependa de alguma expressão adimensional do grau de condutividade (SILVA, 2011).

Os efeitos (I) e (II) eram conhecidos por Faraday (1832) e seus contemporâneos (DAVY, 1821; RITCHIE, 1832) e de fato, a MHD, como uma aplicação de baixos recursos tecnológicos, foi desenvolvida no final do século XIX, e em essência é inteiramente pré-Maxweliana. No entanto, em geral, a MHD é considerada como um assunto muito moderno.

Os pioneiros da eletricidade na década de 1830 (FARADAY, 1832; DAVY, 1821; RITCHIE, 1832) sugeriram que a MHD poderia explicar alguns fenômenos naturais. Faraday (1832) imaginava que o movimento do mar poderia explicar as variações observadas no campo magnético da terra, uma ideia que recentemente ganhou destaque entre os geofísicos. Ritchie (1832) especulou que o movimento dos oceanos poderia ter origem na força eletromagnética do campo terrestre. Por outro lado se desconhecia a origem das correntes elétricas. Mas, a aplicação destas ideias para explicar os fenômenos naturais perdurou durante todo o resto do século. O assunto não progrediu muito nos laboratórios, principalmente porque os mais óbvios

experimentos eram feitos com fluídos, como mercúrio ou eletrólitos, que não são bons condutores de eletricidade. No entanto, vários artefatos pequenos foram desenvolvidos com os princípios da MHD. Um exemplo é o magnetômetro de Leduc (1887).

Ritchie (1832) fez um experimento para bombear água eletromagneticamente, mas até o século XX esse dispositivo óbvio da MHD, a bomba eletromagnética, não se desenvolveu de forma concreta.

Enquanto isso engenheiros trabalhando isoladamente levaram o assunto a avançar um pouco mais. A primeira proposta para o inverso da bomba eletromagnética, o gerador MHD usando gás ionizado como armadura, parece ter sido proposto por Petersen (1919).

Embora as leis do magnetismo e do escoamento de fluidos tenham sido desenvolvidas por volta do século XIX, o interesse inicial nos fenômenos da MHD existe a partir do final deste século. A razão de tal “atraso” era, provavelmente, que existia pouco incentivo para as possibilidades oferecidas pela magnetohidrodinâmica. Assim, enquanto poucos experimentos isolados eram realizados por físicos, como Faraday, o assunto permaneceu inexplorado até a virada daquele século (SALAH, 1999).

Este cenário começou a ser modificado quando os astrofísicos perceberam o quão onipresentes são os campos magnéticos e plasmas por todo o universo e bem como muitas outras ciências aplicadas, as investigações sobre a MHD sofreram os efeitos positivos do *boom* do pós-guerra na tecnologia, resultando no surgimento de novas aplicações industriais e científicas. No início da década de 30, os trabalhos de Cowling (1934) e Ferraro (1937) podem ser considerados como pioneiros uma vez que estabeleceram a teoria formal de MHD em uma escala astrofísica. Assim, nesta década a magnetohidrodinâmica obteve um interesse maior no campo da astrofísica e deste modo, começou a se tornar um assunto desenvolvido (SALAH, 1999).

No final da década de 30 e início da década de 40 os trabalhos de Hartmann (1937) e Alfvén (1942) desenvolveram pesquisas cujas contribuições são associadas com as duas únicas características físicas da MHD: a camada de Hartmann - um campo magnético constante orientado perpendicularmente a uma camada limite pode transformar completamente a natureza da mesma, mudando inclusive a sua espessura característica; e as ondas de Alfvén - uma linha de campo magnético pode transmitir ondas inerciais transversais (SALAH, 1999; DAVIDSON, 2001).

Deste modo, a publicação de Alfvén (1942) marcou o surgimento da MHD em pleno direito e a partir de então, a denominação “magnetohidrodinâmica” em si foi introduzido pelo mesmo neste trabalho. Em consequência disto, os últimos efeitos da MHD foram finalmente

compreendidos: “Se um fluido condutor se move em um campo magnético, as correntes induzidas tenderão, em algum sentido, em inibir o movimento relativo do fluido e o campo de velocidade do fluido modifica por sua vez o campo magnético” (SILVA, 2011).

Paralelamente, estudos desenvolvidos por geofísicos começaram a dar indícios de que o campo magnético da terra era gerado pela ação de dínamo do metal líquido de seu núcleo, uma hipótese inicialmente defendida por Larmor (1919) no contexto do campo magnético do sol.

Por outro lado, os pesquisadores da física de plasma desenvolveram seu interesse em magnetohidrodinâmica a partir da década de 1950 buscando a fusão termonuclear controlada, especificamente a estabilidade de plasmas confinados por campos magnéticos, resultando em grandes avanços na teoria da estabilidade (RÊGO, 2010).

Depois de 1950, o assunto desenvolveu-se rapidamente, e logo tornou-se bem estabelecido como um campo de esforço científico de grande importância em vários contextos, tais como: geomagnetismo e magnetismo planetário, astrofísica, física de fusão nuclear (plasma) e tecnologia de metais líquidos (MOLOKOV, 2007).

O desenvolvimento da magnetohidrodinâmica na engenharia só aconteceu efetivamente a partir da década de 1960, por mais que o engenheiro Hartmann já tivesse desenvolvido alguns trabalhos pioneiros na área antes disso. Em 1918, Hartmann inventou a bomba eletromagnética e em 1937, ele empenhou-se em uma sistemática investigação teórica e experimental do escoamento de mercúrio sob um campo magnético homogêneo. Por isso, Hartmann é considerado o pai da magnetohidrodinâmica de metal líquido, sendo o termo “escoamento de Hartmann” usado para descrever escoamentos em dutos na presença de um campo magnético. Esse lento progresso ocorreu em função, principalmente, da baixa condutividade elétrica dos fluidos comumente empregados na engenharia, como o mercúrio e alguns eletrólitos (RÊGO, 2010).

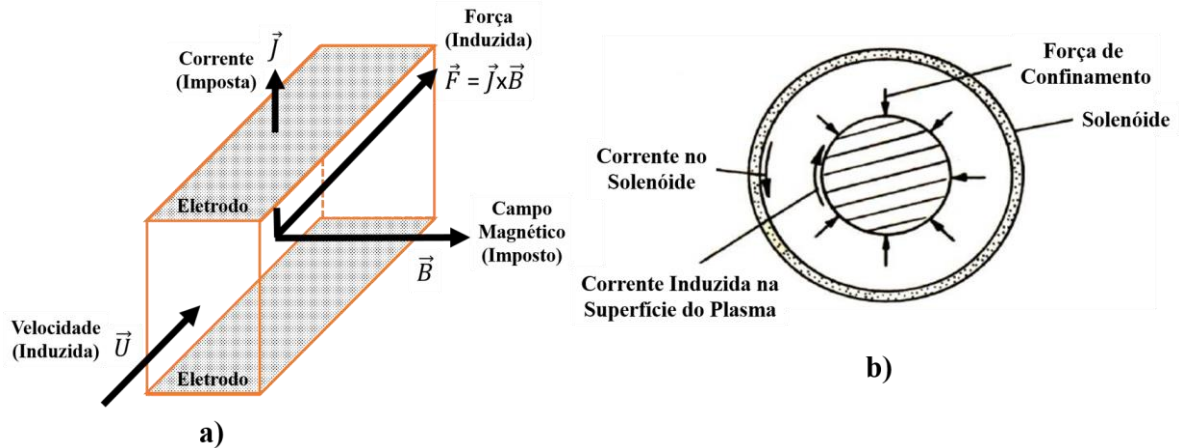


Figura 2.1 Esquema (a) de uma bomba eletromagnética e (b) do confinamento magnético de plasma. Fonte: Adaptado de Rêgo (2009).

Duas inovações tecnológicas baseadas nos fundamentos de MHD estabeleceram novos ramos de aplicação dentro da engenharia: os reatores de alimentação/produção rápida, os quais utilizam sódio líquido como fluido refrigerante e necessita ser bombeado (bombas eletromagnéticas - Figura 2.1 a) e a fusão termonuclear controlada, que requer que um plasma quente seja mantido distante das superfícies do reator por forças eletromagnéticas (Figura 2.1 b) (RÊGO, 2010).

Vinte anos depois, campos magnéticos eram comumente aplicados para aquecer, bombear, agitar (Figura 2.2 a), amortecer o movimento (Figura 2.2 b) e levitar (Figura 2.2 c) metais líquidos em indústrias metalúrgicas de todo o mundo, destacando o surgimento de mais uma área de interesse em MHD (RÊGO, 2010).

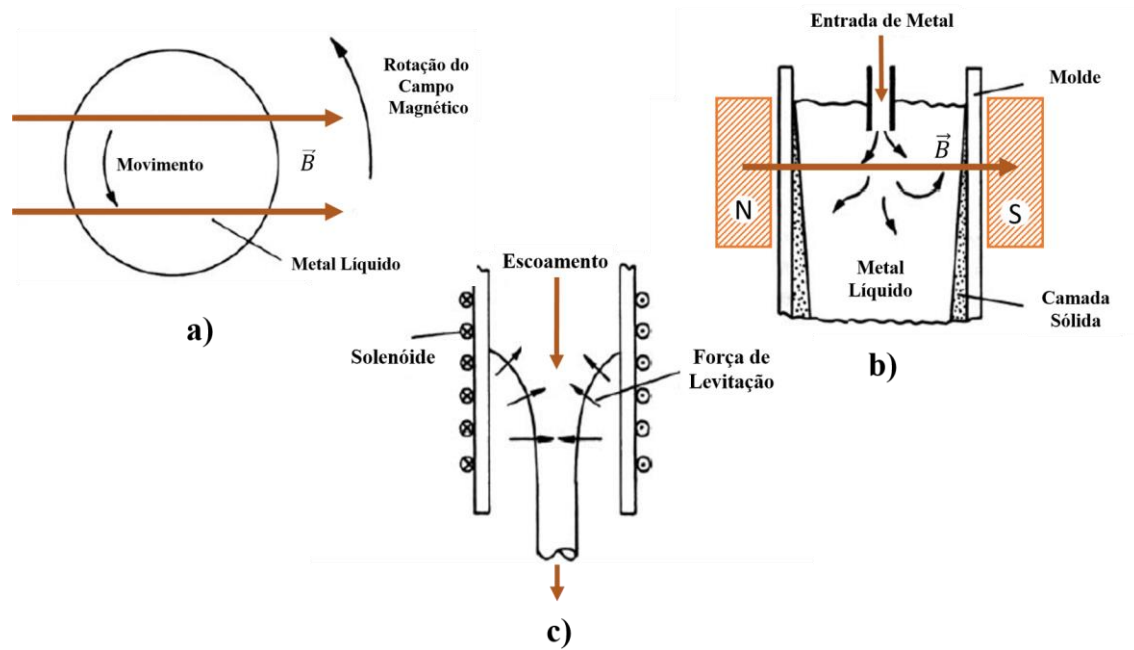


Figura 2.2 Esquema (a) de agitação magnética de um lingote, (b) do amortecimento magnético de movimento durante fundição e (c) de uma válvula eletromagnética. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

O emprego da magnetohidrodinâmica no processo de eletrólise também é bastante importante, especialmente na redução eletrolítica de óxido de alumínio em alumínio. As células eletrolíticas consistem de camadas largas e rasas de criolita (eletrólito), que fica no topo, e alumínio líquido, em que uma corrente elétrica elevada (aproximadamente 200 kA) passa através das duas camadas de cima para baixo, reduzindo continuamente o óxido de metal. Esse processo é energeticamente intensivo, principalmente por causa da elevada resistência elétrica do eletrólito e junto a isso, sabe-se que campos magnéticos dispersos podem desestabilizar a interface entre o eletrólito e o alumínio, através de ondas de gravidade interfaciais, as quais absorvem energia do campo magnético convertendo-a em energia cinética (Figura 2.3). Com o objetivo de evitar estas inconstâncias, a camada de criolita deve ser mantida em uma espessura a partir de algum valor crítico, aumentando, no entanto, o consumo energético (RÊGO, 2010).

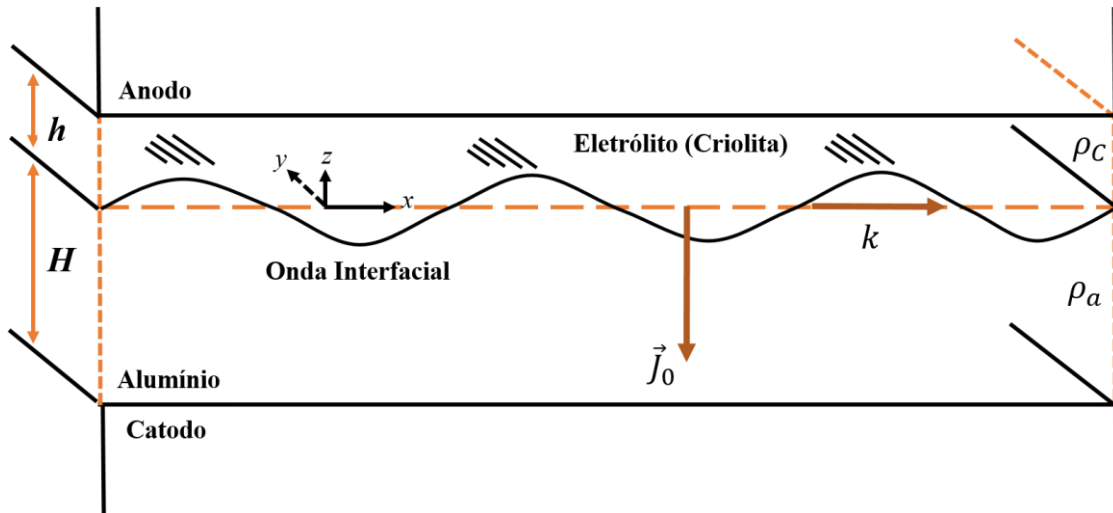


Figura 2.3 Instabilidade em uma célula de redução de alumínio. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

Outras aplicações na engenharia e na metalurgia que podem ser destacadas são a fundição eletromagnética de alumínio, a reformulação de super ligas baseadas em titânio e níquel, a remoção eletromagnética de inclusões não-metálicas de metal fundido, propulsores/lançadores eletromagnéticos e o chamado processo de fundição à frio por indução em cadinhos (vitrificação de lixo nuclear altamente ativo) (RÊGO, 2010).

Como é possível observar, a magnetohidrodinâmica tem se estabelecido de forma substancial e importante na engenharia, particularmente na área de processamento de materiais, surgindo como uma ferramenta excepcional de exercício de um maior controle na fundição e nos processos de refinamento de metais. Todas estas aplicações só são possíveis, pois a força de Lorentz proporciona um meio não intrusivo de conter o escoamento de metais. Deste modo, em um panorama de crescente pressão comercial em se obter materiais mais baratos, melhores, mais consistentes e mais sustentáveis, essas aplicações apresentam importante destaque na indústria (RÊGO, 2010).

2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DE MHD

2.2.1 Conceitos Básicos

As leis de Faraday e Ampère, bem como a força de Lorentz experimentada por um corpo condutor de corrente elétrica, provocam a interação mútua de um campo magnético, \vec{B} , e um campo de velocidade, \vec{U} . Tal interação divide-se, de maneira simplificada, em três ações (RÊGO, 2010):

- a) Uma força eletromotriz (FEM) da ordem de $|\vec{U} \times \vec{B}|$ é gerada pelo movimento relativo de um fluido condutor e um campo magnético conforme é indicado pela lei da indução Faraday. Via de regra, correntes elétricas são geradas ou induzidas e a densidade decorrente, \vec{J} é da ordem de $\sigma(\vec{U} \times \vec{B})$ sendo σ , a condutividade elétrica.
- b) De acordo com a lei de Ampère as correntes induzidas devem também gerar ou induzir um segundo campo magnético e esse campo deve ser “somado” ao campo magnético original, resultando que o fluido parece “arrastar” as linhas de campo magnéticas.
- c) O campo magnético combinado interage com a densidade de corrente induzida, \vec{J} gerando ou induzindo uma força por unidade de volume, a força de Lorentz, $\vec{J} \times \vec{B}$. Essa força age sobre o condutor e, geralmente, é dirigida de maneira a inibir o movimento relativo entre o campo magnético e o fluido.

Os efeitos (b) e (c) têm consequências parecidas, isto é, em ambos os casos, o movimento relativo entre o fluido e o campo magnético tende a ser reduzido. Fluidos podem “arrastar” linhas de campo magnético (efeito b) e campos magnéticos podem “segurar” fluidos condutores (efeito c). Este “congelamento” parcial do meio e do campo magnético é o ponto principal da magnetohidrodinâmica (RÊGO, 2010).

Tais implicações são, talvez, mais familiares no contexto da eletrodinâmica convencional. Tome como exemplo um fio circular sendo puxado através de um campo magnético (Figura 2.4). Assim que o fio é deslocado para a direita, uma FEM da ordem de $|\vec{U} \times \vec{B}|$ é gerada, fazendo com que uma corrente elétrica circule no fio como mostrado (efeito a) (RÊGO, 2010).

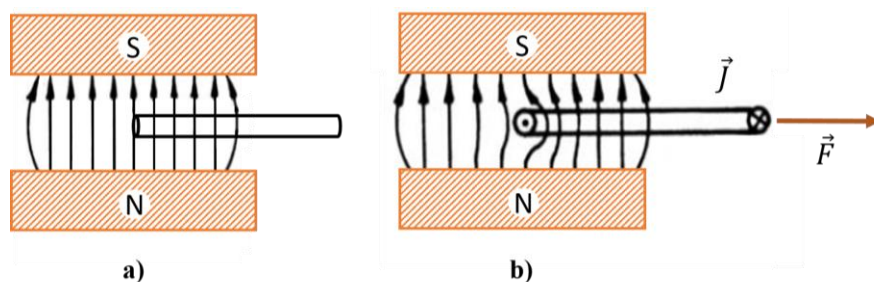


Figura 2.4 Interação entre um campo magnético e um fio circular em movimento. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

O campo magnético associado com a corrente induzida perturba o campo magnético original, e o resultado líquido é que as linhas de campo magnéticas parecem ser “arrastadas” pelo fio (efeito b). A corrente induzida também faz surgir a força de Lorentz, $\vec{J} \times \vec{B}$, a qual age no fio na direção oposta ao do movimento (efeito c). Assim, é necessário fornecer uma força para movimentar o fio (RÊGO, 2010).

O efeito (b) pode ser compreendido iniciando-se pela percepção de que o campo magnético imposto deverá ser influenciado (RÊGO, 2010):

- (1) pela velocidade típica do fluido;
- (2) pela condutividade elétrica do fluido e, de maneira não tão explícita;
- (3) por uma escala característica de comprimento, ℓ , do movimento.

Se o fluido não é condutor ou a sua velocidade é desprezível, não existirá campo magnético induzido significativo. Em contrapartida, se σ ou \vec{U} são grandes, então o campo magnético induzido pode alterar o campo magnético imposto (ver Figura 2.4) (RÊGO, 2010).

De acordo com o que foi dito anteriormente, a FEM gerada pelo movimento relativo entre o campo magnético imposto e o meio é da ordem de $|\vec{U} \times \vec{B}|$, de maneira que, pela lei de Ohm, a densidade de corrente induzida é da ordem de $\sigma(\vec{U} \times \vec{B})$. Entretanto, uma densidade de corrente modesta espalhada sobre uma área grande pode produzir um campo magnético elevado, enquanto que a mesma densidade de corrente espalhada sobre uma área pequena induz apenas um campo magnético fraco (RÊGO, 2010).

Deste modo, o produto $\sigma\vec{U}\ell$ é que determina a razão do campo magnético induzido para o campo magnético aplicado. No limite em que $\sigma\vec{U}\ell \rightarrow \infty$ (típico dos condutores ideais), os campos magnéticos, induzido e imposto, são de mesma ordem de grandeza e nesse caso, o campo magnético combinado se comporta como se estivesse “preso” ao fluido. Por outro lado, quando $\sigma\vec{U}\ell \rightarrow 0$, o campo magnético imposto permanece relativamente inalterado (RÊGO, 2010).

Em função da alta condutividade dos plasmas e à grande escala de comprimento envolvida no fenômeno, a astrofísica se situa mais próxima do primeiro caso. Já a MHD de metal líquido se situa no segundo limite, de forma que o campo de velocidade não perturba significativamente o campo magnético imposto. Apesar desse fato, o efeito (c) ainda é forte em metais líquidos, de maneira que um campo magnético imposto altera substancialmente o campo de velocidade (RÊGO, 2010).

Levando em conta a permeabilidade do espaço livre, μ_m , a difusividade magnética, λ_m , a condutividade elétrica, σ , a massa específica do meio, ρ , e uma escala de comprimento característica, ℓ , podem ser determinados três parâmetros principais da magnetohidrodinâmica (RÊGO, 2010).

$$Re_m = \mu_m \sigma U \ell = \frac{U \ell}{\lambda_m} \quad \text{Número de Reynolds Magnético} \quad (2.1)$$

$$v_a = \frac{B}{\sqrt{\rho \mu_m}} \quad \text{Velocidade de Alfvén} \quad (2.2)$$

$$\tau = \left(\frac{\sigma B^2}{\rho} \right)^{-1} \quad \text{Tempo de Amortecimento Magnético} \quad (2.3)$$

O número de Reynolds magnético é a medida adimensional da condutividade elétrica, e juntamente com σ , são os fatores importantes no estudo da MHD. Logo, quando Re_m é elevado, as linhas de campo magnéticas agem como cordas elásticas “agarradas” ao meio, implicando em duas consequências:

- (a) o fluxo magnético através de uma curva material fechada tende a ser conservado durante o movimento do fluido (as linhas de fluxo tendem a acompanhar a curva, Figura 2.4);
- (b) pequenos distúrbios no meio resultam em oscilações quasi-elásticas, o campo magnético fornecendo a força de restauração para as oscilações. Isso resulta nas ondas de Alfvén, de frequência $\omega \approx v_a / \ell$.

Quando Re_m é baixo, a velocidade, U , tem pouca influência sobre o campo magnético, B , uma vez que o campo induzido é desprezível comparado ao imposto. Deste modo, o campo magnético comporta-se de maneira dissipativa, não elástica, amortecendo o movimento pela conversão de energia cinética em calor, via efeito Joule. A escala de tempo relevante é agora o tempo de amortecimento, τ , e não ℓ/v_a (RÊGO, 2010).

2.2.2 Equações do Eletromagnetismo

As leis básicas do eletromagnetismo são: a lei de Lorentz, lei de Ohm, a lei de Faraday e a lei de Ampère, e estas serão discutidas em maiores detalhes em seguida.

2.2.2.1 Campo Elétrico e Forças de Lorentz

Considere uma partícula que está se movendo com velocidade \vec{U} e transportando uma carga q . A mesma, em geral, está submetida a três forças eletromagnéticas (RÊGO, 2010):

$$\vec{F} = q\vec{E}_s + q\vec{E}_i + q\vec{U} \times \vec{B} \quad (2.4)$$

- O primeiro termo é a força eletrostática, ou força de Coulomb, a qual surge da repulsão ou atração mútua de cargas elétricas (\vec{E}_s é o campo eletrostático),

- O segundo termo é a força que a carga experimenta na presença de um campo magnético dependente do tempo (\vec{E}_i é o campo elétrico induzido pelo campo),

- O terceiro termo é a força de Lorentz, a qual surge com o movimento da carga em um campo magnético.

A lei de Coulomb afirma que \vec{E}_s é irrotacional, e a lei de Gauss estabelece a sua divergência. Assim (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{E}_s = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \vec{E}_s = 0 \quad (2.5, 2.6)$$

em que ρ_e é a densidade de carga total (cargas livres e de ligação) e ϵ_0 é a permissividade do espaço livre. Em função da Eq. (2.6), pode-se introduzir o potencial eletrostático V , definido por $\vec{E}_s = -\nabla V$, de maneira que da Eq. (2.5) tem-se $\nabla^2 V = -\rho_e/\epsilon_0$ (RÊGO, 2010).

Já o campo elétrico induzido possui divergência nula, enquanto o seu rotacional é finito e governado pela lei de Faraday demonstrada na equação abaixo (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = 0; \quad \nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.7, 2.8)$$

Deste modo, é adequado definir o campo elétrico total como $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$, de tal maneira que se pode escrever de maneira geral (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}; \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.9, 2.10)$$

Lei de Gauss Lei de Faraday

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad \text{Força Eletrostática + Força de Lorentz} \quad (2.11)$$

E se, diferentemente de \vec{U} , \vec{E} e \vec{B} , for medido um campo elétrico em um sistema de coordenadas fixo na carga em movimento, define-se o campo elétrico relativo ou efetivo (RÊGO, 2010):

$$\vec{F} = q\vec{E}_r; \quad \vec{E}_r = \vec{E} + \vec{U} \times \vec{B} \quad (2.12, 2.13)$$

2.2.2.2 Lei de Ohm e Força de Lorentz Volumétrica

No estudo da MHD, a importância maior está na força global agindo sobre o meio e não nas forças sobre partículas individuais. Desta forma, um somatório sobre um volume unitário do condutor produz (RÊGO, 2010):

$$\begin{array}{ll} \sum q = \rho; & \sum q\vec{U} = \vec{J} \\ \text{Densidade de Carga} & \text{Densidade de Corrente} \end{array} \quad (2.14, 2.15)$$

Assim, a versão volumétrica da Eq. (2.11) (força de Lorentz) é (RÊGO, 2010):

$$\vec{F} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{Força por Unidade de Volume} \quad (2.16)$$

Em contrapartida, as velocidades comumente encontradas em aplicações de engenharia são muito menores do que a velocidade da luz e a densidade de carga é muito pequena, de maneira que o primeiro termo da Eq. (2.16) pode ser desprezado. Logo, na magnetohidrodinâmica de metais líquidos, a força de Lorentz é escrita na forma (RÊGO, 2010):

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} \quad \text{Força de Lorentz Volumétrica (MHD)} \quad (2.17)$$

Nota-se também que à densidade de corrente, \vec{J} , em um condutor estacionário é proporcional à força gerada pelas cargas livres, $q\vec{E}$, podendo ser descrita pela lei de Ohm convencional como $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ (Figura 2.5 a) (RÊGO, 2010).

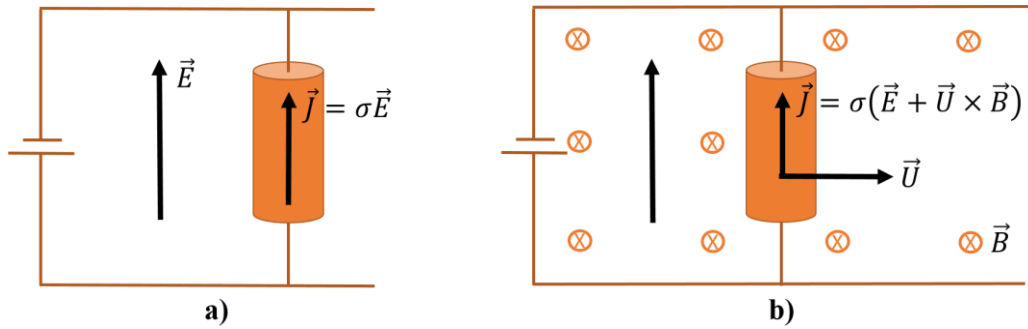


Figura 2.5 Lei de Ohm em um condutor (a) estacionário e (b) em movimento. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

Porém, se, além disso, o condutor se move com velocidade \vec{U} sob um campo magnético, as cargas livres experimentarão uma força adicional $q\vec{U} \times \vec{B}$, e a lei de Ohm é agora escrita de maneira generalizada como (Figura 2.5 b) (RÊGO, 2010):

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_r = \sigma (\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad \text{Lei de Ohm (MHD/Não-MHD)} \quad (2.18)$$

Contudo, se o condutor é um meio fluido, o campo de velocidade \vec{U} variará, em geral, com a posição e esta particularidade torna a interação entre \vec{U} e \vec{B} mais sutil e mais difícil de quantificar (RÊGO, 2010).

2.2.2.3 Lei de Ampère

De forma simples, a lei de Ampère aborda o campo magnético gerado por uma distribuição de corrente (Figura 2.6). Se C é uma curva fechada, composta de elementos de linha $d\vec{\ell}$, e S é qualquer superfície limitada por essa curva, a lei de Ampère estabelece (RÊGO, 2010):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_m \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{Lei de Ampère} \quad (2.19)$$

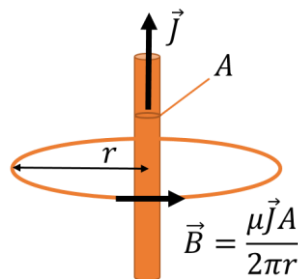


Figura 2.6 Lei de Ampère aplicada a um fio. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

Essa lei pode ser compreendida como a circulação do campo magnético em torno da curva C é igual ao fluxo (densidade) de corrente através da superfície (área, S) delimitada pela curva sobre a qual a circulação está sendo calculada. Aplicando o teorema de Gauss, a lei de Ampère é descrita na forma diferencial como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \vec{J} \quad \text{Lei de Ampère} \quad (2.20)$$

Maxwell verificou, posteriormente, que a lei necessitava considerar a até então desconhecida corrente de deslocamento (a qual se fazia necessária para satisfazer o princípio de conservação da carga, ver Eq.2.24), de modo que a lei passou a ser denominada lei de Ampère-Maxwell. Na forma diferencial ela é escrita como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_m \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{Lei de Ampère-Maxwell} \quad (2.21)$$

Embora a contribuição de Maxwell tenha sido de suma importância, sua correção não é necessária em MHD de metal líquido, de forma que, nestes casos, é empregada a lei de Ampère na sua forma anterior (RÊGO, 2010).

2.2.2.4 Lei de Faraday

A lei de Faraday estabelece que a FEM, a qual é gerada em um condutor como resultado de (1) um campo magnético variável (dependente do tempo) ou (2) do movimento de um condutor no interior de um campo magnético (Figura 2.7), pode ser escrita como (RÊGO, 2010):

$$FEM = \oint_C \vec{E}_r \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{Lei de Faraday/Lenz} \quad (2.22)$$

em que C é uma curva fechada, composta de elementos de linha $d\vec{\ell}$ e S é qualquer superfície limitada por essa curva. Novamente, como na Eq. (2.13), \vec{E}_r é o campo elétrico efetivo, medido em uma referência fixa na carga/elemento $d\vec{\ell}$ em movimento. Assim como na lei de Ampère, a lei de Faraday pode ser entendida como a circulação do campo elétrico em torno da curva C (FEM gerada) é igual ao decréscimo da taxa de variação como tempo do fluxo (densidade) magnético através da superfície (área, S) delimitada pela curva sobre a qual a circulação está sendo calculada (RÊGO, 2010).

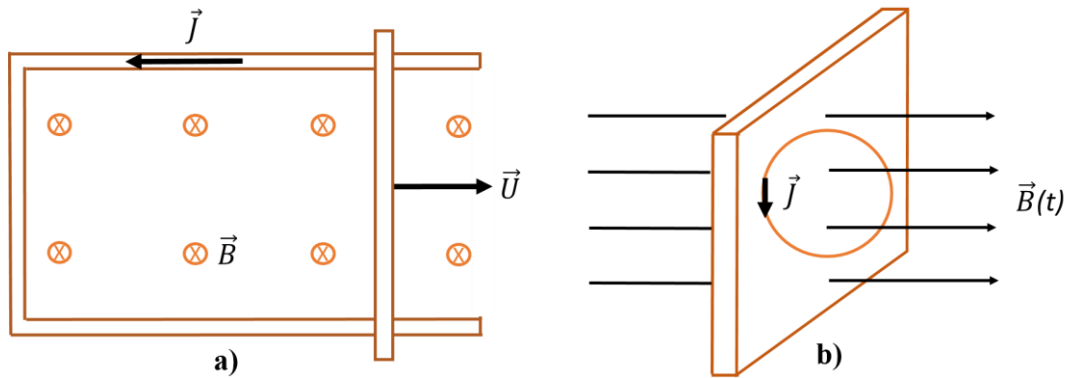


Figura 2.7 Lei de Faraday (a) FEM gerada pelo movimento de um condutor, (b) FEM gerada por um campo magnético dependente do tempo. Fonte: Adaptado de Davidson (2001).

Mais uma vez, aplicando o teorema de Gauss e supondo que a curva é rígida e está em repouso, a lei de Faraday é descrita na forma diferencial, como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Lei de Faraday (MHD/Não-MHD)} \quad (2.23)$$

Ressalta-se que a Eq. (2.23) representa um caso especial da Eq. (2.22), sendo uma definição menos geral do que a sua versão original. Na Eq. (2.23) a FEM pode ser gerada pela variação do fluxo de \vec{B} com o tempo, pelo movimento uniforme da curva em um campo não-homogêneo, ou pela mudança da forma da curva, porém a mesma estabelece apenas o campo elétrico induzido por um campo magnético variante com o tempo (RÊGO, 2010).

2.2.2.5 Conservação de Carga

Como dito anteriormente, a necessidade de conservação da carga requer que a taxa na qual a carga decresce em um volume de controle deve ser igual ao fluxo de carga para fora através de sua superfície (densidade de corrente, Eq. 2.15) (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad \text{Equação da Conservação da Carga} \quad (2.24)$$

Logo, considerando o divergente em ambos os lados da Eq.(2.24), e usando a lei de Gauss, obtém-se (RÊGO, 2010):

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} + \sigma \nabla \cdot (\vec{U} \times \vec{B}) = 0; \quad \tau_e = \frac{\epsilon_e}{\sigma} \quad (2.25, 2.26)$$

em que τ_e é o tempo de relaxação da carga, e para um condutor típico é aproximadamente $10^{-18} s$, um valor extremamente pequeno. A fim de compreender a origem do seu nome, considere a situação onde $\vec{U} = 0$. Nesse caso a Eq. (2.25), e sua solução, são mostradas a seguir (RÊGO, 2010):

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} = 0; \quad \rho_e(t) = \rho_e(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_e}\right) \quad (2.27, 2.28)$$

Qualquer densidade de carga líquida que, no tempo $t = 0$, estiver no interior de um condutor se moverá rapidamente para a superfície sob a ação de forças de repulsão eletrostáticas. Assim, ρ_e é sempre zero em condutores estacionários, exceto durante algum minúsculo período, como, por exemplo, quando uma bateria é ligada (RÊGO, 2010).

Considere, agora, a situação em que $\vec{U} \neq 0$. Uma vez que se está interessado em eventos que ocorrem em uma escala de tempo muito maior do que τ_e , $\partial \rho_e / \partial t$ pode ser desprezado em comparação com ρ_e / τ_e , de maneira que a Eq. (2.25) é escrita como (RÊGO, 2010):

$$\rho_e = -\varepsilon_e \nabla \cdot (\vec{U} \times \vec{B}) \quad (2.29)$$

Deste modo, quando existe movimento, pode-se sustentar uma densidade de carga finita no interior de um condutor. No entanto, como será visto a seguir, ρ_e é muito pequena, incapaz de produzir qualquer força elétrica significativa, $\rho_e \vec{E}$, de maneira que se justifica a Eq. (2.17) (RÊGO, 2010).

Em termos de escalas características a equação anterior pode ser aproximada por $\rho_e \sim \varepsilon_0 UB / \ell$, enquanto da lei de Ohm por $\vec{E} \sim \vec{J} / \sigma$, de maneira que $\rho_e E \sim (\varepsilon_0 UB / \ell)(J / \sigma) \sim (U \tau_e / \ell) JB$. Com relação a dimensão $U \tau_e / \ell$ é da escala de 10^{-18} , e logo, a força de Lorentz domina completamente a Eq. (2.16), a qual passa a ser escrita pela Eq. (2.17) (RÊGO, 2010):

Nota-se também que para $\vec{U} \neq 0$, uma hipótese básica foi desprezar $\partial \rho_e / \partial t$ de maneira que a equação da conservação da carga, Eq. (2.24), passa a ser escrita como (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{Equação da Conservação da Carga (MHD)} \quad (2.30)$$

Com relação à lei de Ampère-Maxwell, explicitando a densidade de corrente \vec{J} , aplicando o divergente sobre a equação obtida e fazendo uso da lei de Gauss, obtém-se (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (2.31)$$

A Eq. (2.31) é exatamente a equação da conservação da carga, a qual demonstra que se a lei de Ampère for empregada sem a corrente de deslocamento (correção de Maxwell), a conservação da carga seria violada. No entanto, como já citado, em condutores, o termo $\partial \rho_e / \partial t$ é desprezível, ou, por argumentos dimensionais, a corrente de deslocamento é muito menor do que \vec{J} . Assim a Eq. (2.20) é suficiente para análises de MHD (RÊGO, 2010).

Além disso, essa equação é consistente com a Eq. (2.30), a equação da conservação da carga simplificada, uma vez que, tomando-se o divergente da Eq. (2.20), obtém-se a Eq. (2.32) (RÊGO, 2010).

Por fim, com relação à lei de Faraday, Eq. (2.23), tomando-se o divergente em ambos os lados, obtém-se (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

Tal resultado mostra que \vec{E} é solenoidal. Na realidade, o próprio B é solenoidal (RÊGO, 2010):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{MHD/Não-MHD} \quad (2.33)$$

Esse resultado permite a introdução de um outro campo, \vec{A} , denominado vetor potencial, o qual é definido tal que (RÊGO, 2010):

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.34, 2.35)$$

Essa definição garante, automaticamente, que \vec{B} é solenoidal, já que $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$.

Agora a substituição de \vec{A} na lei de Faraday, Eq. (2.23) (RÊGO, 2010),

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (2.36)$$

em que V é uma função escalar arbitrária (potencial eletrostático), necessária no resultado, tendo

em vista que $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$ e as restrições impostas pelas Eqs. (2.6),

$\nabla \times \vec{E}_s = 0$ e (2.7), $\nabla \cdot \vec{E}_i = 0$ (RÊGO, 2010).

$$\vec{E}_s = -\nabla V; \quad \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.37, 2.38)$$

2.2.2.6 Equação de Transporte do Campo Magnético

Como já foi mencionado, em casos onde o número de Reynolds magnético é de moderado a elevado, o campo magnético é influenciado pelo campo de escoamento. Para se obter a equação de transporte (advecção/difusão) do campo magnético, algumas vezes denominada de equação da indução, para esta situação, basta combinar as leis de Ohm, Faraday e Ampère (RÊGO, 2010):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{U} \times \vec{B} \right) = \nabla \times \left(\vec{U} \times \vec{B} - \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_m \sigma} \right) \quad (2.39)$$

Levando em conta que $\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$, uma vez que \vec{B} é solenoidal, a equação da advecção/difusão do campo magnético é (RÊGO, 2010):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{U} \times \vec{B}) + \lambda_m \nabla^2 \vec{B} \quad (2.40)$$

em que $\lambda_m = (\mu_m \sigma)^{-1}$ é denominada de difusividade magnética. A partir da observação da Eq. (2.39) nota-se o forte acoplamento entre o campo do escoamento e o campo magnético, caracterizando a interação de duas vias entre os dois campos. A fim de se estabelecer a solução de cada problema, condições de contorno e condições iniciais devem ser especificadas para o campo magnético (RÊGO, 2010).

Conforme mencionado anteriormente, um novo parâmetro (adimensional) surge quando essa equação é escrita na forma adimensional, o qual indica a intensidade relativa entre a advecção e a difusão do campo magnético. Uma vez que esta equação é feita em analogia com a equação de transporte de quantidade de movimento, tal parâmetro recebeu o nome de número de Reynolds magnético, já introduzido na Eq. (2.1) (RÊGO, 2010).

Logo, quando Re_m é elevado, a difusão do campo magnético é baixa, e o campo magnético é “arrastado/advectado” pelo escoamento. Caso contrário, o campo magnético é difundido no campo de escoamento (RÊGO, 2010).

2.2.3 Equações de Navier-Stokes e a Força de Lorentz

Já é de conhecimento que os campos magnéticos, assim como qualquer outra força de campo/corpo, atuam em todo ponto do escoamento, de modo que seu efeito é diretamente incluído através de um termo adicional de força por unidade de volume, a força de Lorentz por unidade de volume. Logo, considerando tal força de corpo, as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível com propriedades físicas constantes são escritas como (RÊGO, 2010):

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2\vec{U} + \frac{1}{\rho}(\vec{J} \times \vec{B}) \quad (2.41)$$

Reescrevendo a equação na forma adimensional surgem três grupos adimensionais:

O primeiro é o número de Reynolds, o qual, como na mecânica dos fluidos convencional, indica a razão das forças inerciais, $\vec{U}(\vec{U} \cdot \nabla)$, pelas forças viscosas, $\nu\nabla^2\vec{U}$, conforme mostra a equação a seguir (RÊGO, 2010):

$$Re = \frac{\rho U \ell}{\mu} = \frac{U \ell}{\nu} \quad (2.42)$$

O segundo grupo é o denominado parâmetro de interação magnética (RÊGO, 2010),

$$N = \frac{\sigma B^2 \ell}{\rho U} = \frac{\ell}{U \tau} \quad (2.43)$$

em que τ é o tempo de amortecimento magnético, Eq. (2.3). O parâmetro de interação magnética é importante em situações onde a densidade de corrente \vec{J} e deve principalmente à

$\vec{U} \times \vec{B}$ na lei de Ohm. Em tal situação, N representa a razão das forças de Lorentz, $(\vec{J} \times \vec{B})/\rho$, pelas forças de inércia, $\vec{U}(\vec{U} \cdot \nabla)$ (RÊGO, 2010).

O terceiro parâmetro adimensional, denominado de número de Hartmann, é um híbrido de Re e N , representando (a sua potência quadrática) a razão das forças de Lorentz, $(\vec{J} \times \vec{B})/\rho$ pelas forças viscosas, $\nu \nabla^2 \vec{U}$ (RÊGO, 2010):

$$Ha = (N Re)^{1/2} = Bl \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

2.2.3.1 Tensões de Maxwell

Tendo em vista a identidade vetorial, $\nabla(\vec{B}^2/2) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times \nabla \times \vec{B}$ e a lei de Ampère, $\nabla \times \vec{B} = \mu_m \vec{J}$, a força de Lorentz pode ser reescrita em termos do campo magnético, \vec{B} , apenas resultando (RÊGO, 2010):

$$\vec{J} \times \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{B}}{\mu_m} \right) - \nabla \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_m} \right) \quad (2.45)$$

O segundo termo do lado direito da equação age sobre o fluido da mesma maneira que a força de pressão $-\nabla P$. Tal termo é irrotacional, de maneira que não influencia o campo de escoamento. Em escoamentos internos, sua função é simplesmente aumentar a pressão do fluido. Por essa razão, $\vec{B}^2/2\mu_m$ é comumente denominada de pressão magnética. Por outro lado, o primeiro termo do lado direito pode ser escrito em notação indicial como (RÊGO, 2010):

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \left(\frac{B_i}{\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{B_i B_j}{\mu_m} \right) \quad (2.46)$$

Deste modo, pode-se compreender que o efeito dessa parte da força de corpo é análogo a uma ação fictícia de tensões, $B_i B_j / \mu_m$, agindo na superfície de elementos fluidos (RÊGO, 2010).

Em resumo, pode-se substituir a força de corpo de Lorentz, $\vec{J} \times \vec{B}$, por um efeito equivalente de tensões superficiais imaginárias, denominadas tensões de Maxwell (RÊGO, 2010):

$$\tau_{ij} = \frac{B_i B_j}{\mu_m} - \frac{\vec{B}^2}{2\mu_m} \delta_{ij} \quad (2.47)$$

2.2.4 Equação da Energia

A equação da Energia é obtida a partir da 1ª Lei da Termodinâmica levando em conta o termo da dissipação viscosa bem como o termo do aquecimento Joule (RÊGO, 2010):

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{v}{C_p} \Phi + \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{\sigma \rho C_p} \quad (2.48)$$

2.3 MHD EM CANAIS

Conforme citado no Capítulo I, o presente estudo visa a avaliação do desenvolvimento térmico e hidrodinâmico em um canal de placas planas e paralelas em regime laminar com transferência de calor de um fluido condutor elétrico sob a influência de um campo magnético constante, em que o fluido troca calor com as placas do canal, as quais estão a temperaturas diferentes do fluido.

Este tipo de problema de convecção forçada (magnetoconvecção) pode ser considerado em diversas aplicações na engenharia e em outras ciências e em função disso, alguns trabalhos já foram desenvolvidos neste tipo de geometria, e além disso encontra emprego na indústria do petróleo, em reatores nucleares e nos campos da engenharia metalúrgica, especialmente na produção de alumínio por eletrólise em células de redução, e no desenvolvimento de geradores magnetohidrodinâmicos. Outra aplicação a ser destacadas é o processo da conversão de energia associada ao aumento da eficiência térmica e energética.

Essa classe de problemas começou a ser estudada mantendo o foco apenas na dinâmica do escoamento (CHANG E LUNDGREN, 1959; TAO, 1960, MANOHAR, 1966, HWANG *et al.* 1966). Desse modo, a seguir são revisados alguns dos trabalhos considerados mais importantes para o desenvolvimento do presente estudo.

Shercliff (1953, 1965) aplicou metodologias de aproximação na resolução do problema da entrada magnetohidrodinâmica em medidores de vazão de seção circular, mas não chegaram a determinar, explicitamente, perfis de velocidades.

Roidt e Cess (1962) utilizaram o método aproximado desenvolvido por Schlichting (1934) para solucionar o problema do escoamento magnetohidrodinâmico na entrada de um duto plano, considerando o perfil de velocidade na entrada uniforme, em que as equações do

modelo foram inicialmente linearizadas e os problemas resultantes foram resolvidos de forma analítica ou numérica.

Manohar (1966) avaliou o mesmo problema de Roidt e Cess (1962), porém aplicando um procedimento numérico derivado do utilizado por Hartree (1949), onde os termos das equações governantes envolvendo derivadas na direção x foram substituídos pelo método das diferenças finitas, enquanto os demais eram substituídos por suas médias. De acordo com o autor, o método abordado é mais exato do que o anterior, uma vez que o mesmo corresponde apenas à primeira iteração do esquema desenvolvido por ele.

Hwang e Fan (1963) também examinaram o mesmo problema de entrada magnetohidrodinâmica com entrada uniforme no canal, porém aplicaram um esquema mais adequado de diferenças finitas para o tipo de solução das equações não lineares do problema, obtendo melhores resultados.

Maciulaitis e Loeffler (1964) aplicaram o método integral de Karman-Pohlhausen para avaliar o escoamento magnetohidrodinâmico na região de entrada de um canal, considerando um perfil de velocidade parabólico na entrada.

Posteriormente, Hwang *et al.* (1966), empregando um esquema de diferenças finitas semelhante ao desenvolvido por Hwang e Fan (1963), resolveram o mesmo problema de entrada magnetohidrodinâmica, considerando agora um perfil parabólico na entrada do canal. Por empregarem um método mais robusto, chegaram a resultados mais confiáveis do que os de Maciulaitis e Loeffler (1964).

Hwang (1972) analisou a região de entrada hidrodinâmica de um canal sob a presença de um campo magnético constante através de um procedimento de linearização das equações. Os seus resultados, considerando um perfil de velocidade parabólico na entrada do canal, foram comparados com os produzidos por Hwang *et al.* (1966).

Chen e Chen (1972) adaptaram o método desenvolvido por Sparrow *et al.* (1964) para o estudo de escoamentos em dutos, e analisaram a região de entrada do escoamento magnetohidrodinâmico induzido por uma distribuição de velocidade arbitrária na entrada do canal. Resolveram uma forma linearizada das equações de camada limite que descrevem o escoamento.

Dentre os trabalhos pesquisados, o único trabalho que relatava a solução do problema da entrada hidrodinâmica na presença de um campo magnético, considerando as equações de Navier-Stokes, foi o reportado por Brandt e Gillis (1966). Empregando a formulação de função corrente, empregaram um esquema de diferenças finitas para resolver as equações sem recorrer a nenhum recurso simplificador.

O desenvolvimento simultâneo térmico e hidrodinâmico começou a ser estudado por Shohet *et al.* (1962), o qual analisou ambos os perfis uniformes na entrada do canal e resolveram o problema da entrada simultânea, aplicando uma discretização nas equações da formulação em camada limite, baseando-se no método de diferenças finitas utilizado por Bodoia e Osterle (1961). Os autores analisaram duas condições de operação do canal: como gerador, na qual energia elétrica pode ser removida do fluido, e como bomba ou motor, na qual energia elétrica é adicionada ao fluido, introduzindo-se uma força de corpo aceleradora no escoamento.

Outros autores avaliaram o desenvolvimento de campos de velocidade e de temperatura sob efeito de campos magnéticos, considerando ainda as propriedades termofísicas e de transporte variáveis. Dentre estes trabalhos, destacam-se: Rosa (1971) que, em um trabalho pioneiro, discutiu, experimental e teoricamente, o efeito de propriedades de transporte variáveis em escoamentos sob campos magnéticos; Setayeshpour e Sahai (1985) também discutiram o efeito de propriedades de transporte dependentes da temperatura na região de entrada de um canal, considerando um tipo de condição de contorno generalizada, na qual o fluxo de calor é função linear da temperatura local.

Baseados nos trabalhos anteriormente citados, Setayesh e Sahai (1990) realizaram um estudo, baseado na discretização em diferenças finitas das equações de camada limite que governam o problema do desenvolvimento simultâneo em um canal de placas paralelas, considerando propriedades de transporte dependentes da temperatura. Eles consideraram um escoamento uniforme na entrada do canal, assumindo que as placas mantinham a temperatura constante.

Finalmente, Ganesh e Venkatesh (2015) trataram sobre os efeitos da estratificação e do campo magnético aplicado no escoamento viscoso oscilatório completamente desenvolvido através de placas porosas paralelas em que as equações governantes são reduzidas em uma única equação diferencial parcial e, em seguida, em um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem 4 com coeficientes complexos usando transformação de similaridade, em que a solução obtida é interpretada graficamente usando o programa MATLAB.

Nesse contexto, o presente trabalho fundamentado nos resultados obtidos pelos trabalhos supracitados, analisa o problema do desenvolvimento simultâneo do escoamento em um canal de placas paralelas submetido a um campo magnético constante, sob um ponto de vista de uma técnica híbrida (GITT), em que as paredes do canal são mantidas à temperatura constante (iguais) e as propriedades termofísicas e de transporte também são consideradas constantes.

2.4 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA - GITT

Em função do avanço tecnológico diversos problemas cada vez mais complexos têm surgido na área de engenharia que requerem soluções mais precisas em tempos de processamento menores, buscando um melhor emprego destes recursos. Na maioria das vezes, tais problemas, não apresentam soluções analíticas, e por conta disso são tratados por técnicas de aproximação numéricas, uma vez que os computadores atuais atingiram um processamento de alta velocidade e uma enorme capacidade de armazenamento de dados (RÊGO, 2010).

Um dos métodos analíticos mais comuns na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) é o método de separação de variáveis, o qual possui restrições em resolver certas EDPs lineares, como as equações de condução de calor envolvendo não homogeneidade nas condições de contorno e/ou termos de geração na equação diferencial, o que levou ao desenvolvimento de métodos mais gerais para o tratamento destes problemas (RÊGO, 2010).

Neste contexto, a primeira tentativa nesse sentido se estabeleceu com o desenvolvimento da Técnica da Transformada Integral Clássica (do inglês *Classical Integral Transform Technique* CITT), também conhecida como método de expansão em autovalores. A CITT é uma abordagem clássica bem conhecida na solução de certas classes de problemas de difusão, lineares e transformáveis que tem como base o método de separação de variáveis, em que um par transformada/inversa necessário à solução de um dado problema é proposto considerando-se a representação de uma função arbitrária, definida no mesmo domínio, em termos de autofunções inerentes à parte homogênea do problema original (MIKHAILOV & ÖZISIK, 1984; LUIKOV, 1973; ÖZISIK, 1980).

A CITT consiste em se transformar o sistema original de equações diferenciais parciais em um sistema infinito e desacoplado de equações diferenciais ordinárias, que possa ser facilmente resolvido. No entanto, apesar da extensa gama de problemas passíveis de solução exata ter sido ampliada com o uso do método da transformada integral clássica, o método é limitado à classe de problemas lineares transformáveis, isto é, problemas que possam ser transformados em sistemas desacoplados.

Mikhailov & Özisik (1984) reúnem uma série de trabalhos que empregam a transformação integral na solução exata de problemas de difusão de calor e massa. Durante as últimas décadas, após o trabalho pioneiro de Özisik & Murray (1974) esta metodologia de solução foi largamente estendida para permitir soluções analíticas aproximadas em uma vasta gama de problemas não-transformáveis, conforme é mostrado nos trabalhos de Leite & Özisik (1980), Cotta & Özisik (1986, 1987), Cotta & Mikhailov (1990 e 1993) e Cotta (1992, 1993,

1994). Alguns exemplos desses problemas são equações com coeficientes variáveis, coeficientes variáveis nas condições de contorno, problemas que envolvem um problema auxiliar complicado e problemas não lineares.

O progressivo desenvolvimento da técnica desde seu surgimento levou ao estabelecimento de um método híbrido (numérico-analítico), a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), cuja ideia principal é relaxar-se a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata que resulte em um sistema diferencial ordinário desacoplado. Assim, essa classe de métodos resulta de uma combinação de técnicas analíticas associadas a aproximações numéricas, aparecendo como alternativas aos métodos puramente numéricos para a solução de problemas complexos de engenharia, anteriormente tratados apenas numericamente.

No caso específico da GITT, é aplicada uma etapa numérica após a transformação analítica do problema, destacando a mesma como um método computacional alternativo e proporcionando a obtenção de soluções para validação (*benchmarking*) de códigos numéricos, devido à sua característica de controle automático de erro (garantia de convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento nas séries), mantendo ainda suas características originais de uma solução analítica pura (soluções com um número de algarismos significativos "exatos" ou convergidos para um determinado número de termos nas expansões) e resultando em um desempenho computacional bastante eficiente para uma grande variedade de problemas, os quais são classificados e sistematicamente apresentados com diversas aplicações, incluindo formulação não-lineares de interesse em aplicação de transferência de calor e escoamento de fluidos (COTTA, 1993).

Destaca-se ainda que este método difere dos métodos numéricos comumente empregados para solução de problemas de caráter fortemente não linear e acoplados, pois dispensa a necessidade de discretização do domínio para geração de malhas. Além disso, para melhorar a precisão do método o esforço computacional exigido é relativamente moderado em comparação com os métodos numéricos tradicionais principalmente quando se eleva a dimensão do problema a ser resolvido. Isso justifica-se em função da natureza híbrida da solução, pois a etapa analítica é aplicada sobre todas menos uma variável independente e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma coordenada. Outra característica da solução é a aplicação de filtros algébricos oriundos geralmente de versões simplificadas do próprio problema a ser analisado, empregados para acelerar a convergência da solução.

A GITT pode ser detalhada na aplicação dos seguintes passos:

1) Escolha de um problema auxiliar que contenha tanta informação quanto possível dos operadores do problema original. A escolha do problema auxiliar se baseia no compromisso entre a dificuldade de sua solução e a minimização do esforço computacional para a resolução do sistema diferencial ordinário acoplado resultante da transformação. Alguns problemas auxiliares possuem solução analítica explícita em termo de funções transcendentais, outros requerem solução numérica através do método de contagem de sinal (MIKHAILOV & VULCHANOV, 1983; MIKHAILOV & ÖZISIK, 1984), ou da própria técnica da transformada integral (COTTA, 1993; MIKHAILOV & COTTA, 1994).

2) Desenvolvimento do par transformada integral/inversa associado. Este é um procedimento direto, consequência das propriedades de ortogonalidade das autofunções advindas do problema de autovalor auxiliar.

3) Transformação integral do sistema de equações parciais. A transformação, definida pela aplicação nas equações originais de um operador integral contendo a autofunção do problema auxiliar, leva a um sistema de equações algébricas ou diferenciais ordinárias acopladas ou ainda outra equação diferencial parcial.

4) Resolução numérica, após truncamento em ordem suficientemente grande para uma precisão prescrita, do sistema diferencial ordinário por meio de rotinas bem estabelecidas. Excelentes sub-rotinas são encontradas em pacotes comerciais de bibliotecas científicas, tais como a IVPAG para problemas de valor inicial (parabólicos) e a BVFPD para problemas de valor de contorno (elípticos), ambas da biblioteca IMSL (2010). Dependendo ainda do tipo de problema analisado, outras sub-rotinas são facilmente encontradas nesta biblioteca.

5) Recuperação dos potenciais originais e correlatos, através das fórmulas analíticas de inversão.

Segundo Cotta (1993) os problemas tratados pela técnica da transformada integral até aquele momento podiam ser divididos nas seguintes categorias:

- a) Problemas que apresentem coeficientes variáveis em suas equações governantes;
- b) Problemas que apresentem coeficientes variáveis em suas condições de contorno;
- c) Problemas que apresentem contornos variáveis;
- d) Problemas cujo tratamento envolva problemas auxiliares de difícil solução;
- e) Problemas não lineares caracterizados pela presença de equações cujos termos fontes e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido;

Posteriormente, devido aos grandes avanços alcançados pela GITT, os problemas foram divididos em cinco grandes classes (COTTA, 1993; COTTA, 1998; SANTOS *et al.* 2001):

- a) Problemas de difusão;
- b) Problemas de convecção-difusão;
- c) Problemas de autovalor;
- d) Equações de camada limite;
- e) Equações de Navier-Stokes.

Do ponto de vista das aplicações práticas da engenharia, pode-se citar o sucesso da utilização da GITT na análise de equipamentos termohidráulicos, migração de rejeitos radioativos em solos, aerodinâmica de veículos espaciais, poluição ambiental, processos de secagem, problemas térmicos em siderurgias, combustão, enriquecimento isotópico, resfriamento de equipamentos eletrônicos, reservatórios de petróleo, remoção de metais pesados através de membranas líquidas suportadas, entre outros (VENEZUELA, 2008).

A técnica transformada integral generalizada, que considera que o potencial (velocidade) pode ser construído como uma expansão de autofunções, é empregada por Guerrero e Cotta (1995) na solução numérico-analítica das equações de Navier-Stokes em uma formulação de função corrente que governam o escoamento laminar de um fluido incompressível newtoniano dentro de um canal de placas paralelas, cujos resultados com erros controlados são usadas para inspecionar a precisão relativa de regimes puramente numéricos previamente relatados, bem como comparar Navier-Stokes e formulações de camada limite para várias combinações de condições de entrada e número de Reynolds.

A GITT foi empregada por Lima *et al.* (2007) para a solução do escoamento MHD em canais de placas porosas paralelas de um fluido newtoniano com transferência de calor em regime transiente sustentado por um gradiente de pressão constante, em que os resultados para os campos de velocidade e de temperatura são calculados dentro dos parâmetros governantes em situações típicas obtendo excelente concordância quando confrontados com aqueles previamente relatados na literatura.

Lima e Rêgo (2013) também aplicaram a técnica da transformada integral generalizada na dinâmica do escoamento incompressível, laminar, em regime permanente, com transferência de calor, de um fluido newtoniano condutor elétrico, na região de entrada de um canal de placas planas paralelas, submetido a um campo magnético externo uniforme em que foram empregados dois tipos de condições de contorno para o campo de velocidade na entrada no canal e apenas uma para o perfil de temperatura e os resultados para os campos de velocidade, temperatura e potenciais correlatos foram considerados bastante adequados quando comparados aos da literatura.

Além dos trabalhos citados anteriormente, destacam-se: Pontes (2013) que empregou a técnica da transformada integral generalizada na simulação do processo de transferência de massa em membranas, Miyagawa (2014) que realizou transformação integral generalizada do escoamento em dutos bidimensionais de geometria irregular na forma senoidal e Coimbra (2015) que aplicou a GITT na solução do modelo de condução de calor hiperbólico aplicado a espectroscopia de lente térmica.

CAPÍTULO III

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO

O problema abordado neste trabalho é definido ao considerar-se o escoamento magnetohidrodinâmico em um canal formado por duas placas planas paralelas. O mesmo pode ser representado de forma simples por um duto retangular horizontal e semi-infinito. No interior deste canal escoam um fluido condutor elétrico, submetido a um campo magnético transversal constante, \vec{B} . Das quatro placas, duas são isoladas e as outras duas são eletrodos, de modo que, através delas, uma corrente elétrica pode ser imposta (bomba), captada (gerador) ou, simplesmente elas podem ser isoladas (medidor de vazão). As placas, que estão à mesma temperatura, transferem calor por convecção com o fluido.

O problema físico é formulado fazendo-se as seguintes hipóteses:

- Propriedades termofísicas e de transporte do fluido constantes;
- Impermeabilidade no contorno;
- Fluido newtoniano com condutividade elétrica diferente de zero;
- Campo magnético transversal na direção y constante - $\vec{B} = (0, B_0, 0)$;
- Campo elétrico na direção z constante - $\vec{E} = (0, 0, E_3)$;
- Regime permanente;
- Escoamento bidimensional em regime laminar;
- Os efeitos de dissipação pelo efeito Joule são consideradas.

A seguir é apresentado um modelo físico conceitual ilustrando um corte longitudinal e um corte transversal do sistema de placas paralelas onde ocorre o escoamento ao mesmo tempo em que acontece o desenvolvimento térmico.

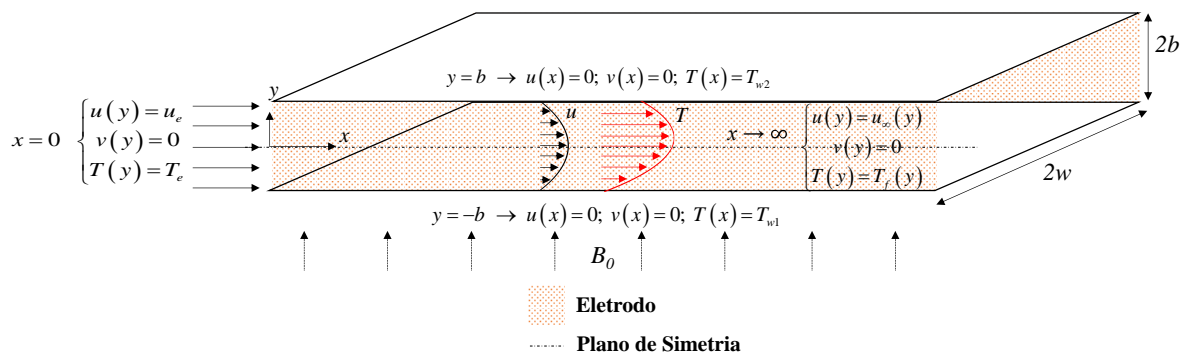


Figura 3.1 Modelo físico conceitual do escoamento MHD em placas paralelas com transferência de calor.

3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O benefício do uso da formulação em função corrente, que descreve os escoamentos bidimensionais e incompressíveis, satisfazendo automaticamente a lei de conservação da massa, é a fácil visualização das linhas de corrente do escoamento, bem como a diminuição do número de equações a serem resolvidas, uma vez que a sua aplicação descarta a necessidade do cálculo do gradiente de pressão, para determinação do campo de velocidade. Destaca-se também que em alguns problemas que empregaram a GITT (PIMENTEL, 1993; SANTOS *et al.*, 2001; LIMA, 2009), o uso da formulação em função corrente também apresentou taxas numéricas de convergência mais acentuadas do que aquelas que empregavam a formulação em variáveis primárias.

Neste contexto, para a modelagem do problema em questão, introduzem-se as equações de balanço aplicadas no modelo mostrado na Fig. (3.1), desenvolvendo-se dois modelos: o campo de velocidade em termos de função corrente e o campo de temperatura.

Deste modo, é possível desenvolver estes dois campos em geometria retangular conforme o modelo físico conceitual de placas paralelas utilizando as Eqs. (2.10), (2.17), (2.18), (2.20), (2.30), (2.33), (2.41) e (2.48), além da Equação da Continuidade (Eq. 3.1) simplificado pelas suposições apresentadas no início deste capítulo:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{Equação da Continuidade} \quad (3.1)$$

3.2.1 Desenvolvimento do Campo de Função Corrente

Expandindo a Eq. (2.41) - Equação de Navier-Stokes - para a coordenada x e para a coordenada y e sabendo-se que $(\vec{J} \times \vec{B})_x = -\sigma B_0 (E_3 + u B_0)$ e $(\vec{J} \times \vec{B})_y = 0$, resulta:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{1}{\rho} \sigma B_0 (E_3^* + u^* B_0) \quad (3.2)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \nu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.3)$$

Considerando-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$u = \frac{u^*}{U}; v = \frac{v^*}{U}; x = \frac{x^*}{b}; y = \frac{y^*}{b} \quad (3.4, a-d)$$

$$P = \frac{P^*}{\rho U^2}; Re = \frac{4bU}{\nu}; Ha = B_0 b \left(\frac{\sigma}{\rho \nu} \right)^{1/2}; E_0 = \frac{E_3^*}{UB_0} \quad (3.5,a-d)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{\partial E_3}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

E a definição da função corrente:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.7,a,b)$$

As Eqs. (3.2) e (3.3) ficam na forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{4}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{4Ha^2}{Re} (E_0 + u) \quad (3.8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.9)$$

A transformação para função corrente é efetuada pela aplicação do operador rotacional na equações de Navier-Stokes, ou seja, diferenciando-se a coordenada x em relação a y e a coordenada y em relação a x , e fazendo-se a diferença entre as equações resultantes, além de levar em conta a Eq. (3.1) - Equação da Vorticidade e as relações (3.6,a-d), de modo a obter o modelo do campo de função corrente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \left(\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \frac{4}{Re} \nabla^4 \Psi - \frac{4Ha^2}{Re} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (3.10)$$

3.2.2 Condições de Contorno de Função Corrente para x e para y

As condições de contorno são:

$$u = 1; \quad v = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (3.11,a,b)$$

$$u = u_\infty(y); \quad v = 0 \quad \text{em} \quad x \rightarrow \infty \quad (3.12,a,b)$$

$$u = 0; \quad v = 0 \quad \text{em} \quad y = -1 \quad (3.13,a,b)$$

$$u = 0; \quad v = 0 \quad \text{em} \quad y = 1 \quad (3.14,a,b)$$

Utilizando-se a função corrente da equação (3.7) em (3.11) até (3.14), resulta em:

$$\Psi(0, y) = 1 + y + C_1; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, y) = 0 \quad (3.15.a,b)$$

$$\Psi(\infty, y) = q + C_1 + qK \left[y \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Hay)}{Ha} \right]; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\infty, y) = 0 \quad (3.16.a,b)$$

$$\Psi(x, -1) = C_1; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, -1) = 0 \quad (3.17.a,b)$$

$$\Psi(x, 1) = C_2; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, 1) = 0 \quad (3.18.a,b)$$

Aplicando em $y = 1$ e $x = 0$ (na entrada da placa superior) e em $y = 1$ e $x = \infty$ (na saída da placa superior), obtém-se:

$$\Psi(0, 1) = C_2 = C_1 + 2; \quad \Psi(\infty, 1) = C_2 = C_1 + 2Kq \left[\cosh(Ha) - \frac{\sinh(Ha)}{Ha} \right]; \quad (3.19.a-c)$$

$$C_2 = C_1 + 2q$$

Desse modo, observa-se que:

$$q = 1 \quad (3.20)$$

E que a relação entre as constantes é dada por:

$$C_2 = C_1 + 2 \quad (3.21)$$

3.2.3 Desenvolvimento do Campo de Temperatura

Desenvolvendo-se a Eq. (2.48) – Equação da Energia - na coordenada x e levando-se em conta o seguinte produto $\vec{J} \cdot \vec{J} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_3^2 = [\sigma(E_3 + uB_0)]^2$, tem-se:

$$\rho C_p \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) + \mu \Phi + \sigma (E_3^* + u^* B_0)^2 \quad (3.22)$$

Aplicando-se os seguintes grupos adimensionais:

$$T = \frac{T^* - T_{w1}}{T_e - T_{w1}}; Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k}; Ec = \frac{U^2}{C_p (T_e - T_{w1})} \quad (3.23.a-c)$$

O modelo do campo de temperatura pode ser obtido:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{4Ec}{Re} \Phi + \frac{4EcHa^2}{Re} (E_0 + u)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{4Ec}{Re} \Phi + \frac{4EcHa^2}{Re} \left(E_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \quad (3.24)$$

Sendo o termo da dissipação viscosa dado por:

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 4 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)^2 \quad (3.25)$$

3.2.4 Condições de Contorno do Campo de Temperatura para x e para y

As condições de contorno adimensionalizadas ficam:

$$T(0, y) = 1; \quad T(\infty, y) = T_\infty = T_f \quad (3.26.a,b)$$

$$T(x, -1) = 0; \quad T(x, 1) = T_{w21} = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_e - T_{w1}} \quad (3.27.a,b)$$

CAPÍTULO IV

4 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

4.1 FILTRAGEM DO PROBLEMA

Embora existam vantagens no uso da formulação obtida a partir da modelagem feita para este problema, a mesma acaba por introduzir uma não-homogeneidade na condição de contorno relativa à parede superior, e assim, caso as temperaturas das placas sejam diferentes, a condição de contorno de temperatura para a placa superior também será não-homogênea.

De modo a remover estas não-homogeneidades trabalhos anteriores (MACHADO, 1995; FIGUEIRA DA SILVA, 1994; PIMENTEL, 1993; SANTOS *et al.*, 2001 e LIMA, 2009) sugeriram o emprego de um procedimento denominado de filtragem dos campos. Esse procedimento nada mais é do que a separação dos campos originais em duas partes: um campo filtrado, que deve incluir as condições de contorno homogêneas, e um filtro que carrega a não homogeneidade original.

A eficiência da filtragem é dependente do filtro que é utilizado em que o mesmo deve ser o mais representativo possível do comportamento característico da solução do campo original, e ao mesmo tempo simples o suficiente para poder ser resolvido analiticamente. Uma vantagem adicional verificada nos trabalhos anteriormente citados é o enfraquecimento dos termos fontes das equações, responsáveis pelo atraso no processo de convergência dos métodos numéricos, e em particular, das expansões empregadas na técnica da transformada integral.

Os filtros propostos para a solução dos campos de função corrente e de temperatura são, respectivamente:

$$\Psi(x, y) = \Psi_{\infty}(y) + \Psi_F(x, y) \quad (4.1)$$

$$T(x, y) = T_f(y) + T_F(x, y) \quad (4.2)$$

Assim, a seguir são aplicados os filtros no campo de função corrente – Eq. (3.10) e no campo de temperatura – Eq. (3.24), a fim de obter um problema homogêneo, ou pelo menos, condições de contorno homogêneas.

4.1.1 Campo de Função Corrente

Aplicando as Eqs. (4.1) e (4.2) na Eq. (3.10), operando as derivadas, fazendo a distribuição dos produtos e fazendo um rearranjo, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial y \partial x^2} \right) + \frac{d \Psi_\infty}{dy} \left(\frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi_F}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{d^3 \Psi_\infty}{dy^3} - \frac{4}{Re} \frac{d^4 \Psi_\infty}{dy^4} = \frac{4}{Re} \left[\frac{\partial^4 \Psi_F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi_F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi_F}{\partial y^4} \right] - \frac{4Ha^2}{Re} \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} \\ & + \frac{4Ha^2}{Re} \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

De (4.3), é possível igualar-se os termos $\frac{4}{Re} \frac{d^4 \Psi_\infty}{dy^4}$ e $\frac{4Ha^2}{Re} \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2}$ de modo a obter-se o problema não-homogêneo (ou problema filtro), o qual pode ser resolvido utilizando a Eq. (A.30).

$$\frac{4}{Re} \frac{d^4 \Psi_\infty}{dy^4} = \frac{4Ha^2}{Re} \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2} \quad (4.4)$$

Deste modo, agrupando os termos restantes da Eq. (4.3), a mesma fica:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right) + \frac{d \Psi_\infty}{dy} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{d^3 \Psi_\infty}{dy^3} = \\ & \frac{4}{Re} \nabla^4 \Psi_F + \frac{4Ha^2}{Re} \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.2 Campo de Temperatura

Substituindo-se as Eqs. (4.1) e (4.2) na Eq. (3.24), operando as derivadas, fazendo a distribuição dos produtos e após algum rearranjo algébrico, têm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \frac{\partial T_F}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{\partial T_F}{\partial y} + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \frac{\partial T_F}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{dT_f}{dy} &= \frac{4}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_F}{\partial y^2} \right) + \\
\frac{4}{RePr} \frac{d^2 T_f}{dy^2} + \frac{4Ec}{Re} \left[4 \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2 \right] + \\
\frac{4EcHa^2}{Re} \left[\left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2 + 2 \left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right) \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} + \left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right)^2 \right] & \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Da Eq. (4.6) os termos $\frac{4}{RePr} \frac{d^2 T_f}{dy^2}$; $\frac{4Ec}{Re} \left(\frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2$ e $\frac{4EcHa^2}{Re} \left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2$ são

somados e igualados a zero, de modo a obter-se o problema não-homogêneo (ou problema filtro), o qual pode ser resolvido utilizando as Eqs. (A.30) e (B.7).

$$\frac{4}{RePr} \frac{d^2 T_f}{dy^2} + \frac{4Ec}{Re} \left(\frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2 + \frac{4EcHa^2}{Re} \left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right)^2 = 0 \quad (4.7)$$

Assim, agrupando os termos restante da Eq. (4.6), fica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \frac{\partial T_F}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{\partial T_F}{\partial y} + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \frac{\partial T_F}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_F}{\partial x} \frac{dT_f}{dy} &= \frac{4}{RePr} \left(\frac{\partial^2 T_F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_F}{\partial y^2} \right) + \\
\frac{4Ec}{Re} \Phi + \frac{4EcHa^2}{Re} \left[\left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right) \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right] & \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Em que:

$$\Phi = 4 \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \frac{d^2 \Psi_\infty}{dy^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_F}{\partial x^2} \right)^2 \quad (4.9)$$

4.1.3 Condições de Contorno

Para x :

$$\Psi_F(0, y) = 1 + y - q - qK \left[y \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Hay)}{Ha} \right]; \quad \frac{\partial \Psi_F(0, y)}{\partial x} = 0; \quad (4.10, a-c)$$

$$\Psi_F(\infty, y) = 0; \quad \frac{\partial \Psi_F(\infty, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T_F(\infty, y)}{\partial x} = 0 \quad (4.11, a-c)$$

Para y :

$$\Psi_F(x, -1) = 0; \quad \frac{\partial \Psi_F(x, -1)}{\partial y} = 0; \quad T_F(x, -1) = 0 \quad (4.12, a-c)$$

$$\Psi_F(x, 1) = 0; \quad \frac{\partial \Psi_F(x, 1)}{\partial y} = 0; \quad T_F(x, 1) = 0 \quad (4.13, a-c)$$

4.2 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

A metodologia a ser aplicada na solução do modelo consiste na Técnica da Transformada Integral Generalizada e a mesma é aplicado através da seguinte sequência de passos:

4.2.1 Escolha do problema de autovalor

4.2.1.1 Campo de Função Corrente

O problema de autovalor é:

$$\frac{d^4 \phi_i}{dy^4} = \mu_i^4 \phi_i \quad (4.14)$$

$$\phi_i(-1) = 0; \quad \frac{d\phi_i(-1)}{dy} = 0 \quad (4.15, a, b)$$

$$\phi_i(1) = 0; \quad \frac{d\phi_i(1)}{dy} = 0 \quad (4.16, a, b)$$

De modo que, a autofunção é:

$$\phi_i(y) = \begin{cases} \frac{\cos(\mu_i y)}{\cos(\mu_i)} - \frac{\cosh(\mu_i y)}{\cosh(\mu_i)}; & i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sin(\mu_i y)}{\sin(\mu_i)} - \frac{\sinh(\mu_i y)}{\sinh(\mu_i)}; & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.17, a, b)$$

Aplicando as condições de contorno, resulta que os autovalores podem ser calculados pela seguinte equação transcendente:

$$\operatorname{tgh}(\mu_i) = \begin{cases} -\operatorname{tg}(\mu_i); & i = 1, 3, 5, \dots \\ \operatorname{tg}(\mu_i); & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.18, a, b)$$

Então, a propriedade da ortogonalidade das autofunções pode ser empregada, resultando que:

$$\int_{-1}^1 \phi_i(y) \phi_j(y) dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_i, & i = j \end{cases} \quad (4.19.a,b)$$

Em que:

$$M_i = \int_{-1}^1 \phi_i^2(y) dy = 2 \quad (4.20)$$

Em que a autofunção normalizada é:

$$\tilde{\phi}_i(y) = \frac{\phi_i(y)}{\sqrt{M_i}} \quad (4.21)$$

4.2.1.2 Campo de Temperatura

O problema de autovalor é:

$$\frac{d^2 \Gamma_i}{dy^2} = -\alpha_i^2 \Gamma_i \quad (4.22)$$

$$\Gamma_i(-1) = 0; \quad \Gamma_i(1) = 0 \quad (4.23.a,b)$$

Logo, a autofunção é:

$$\Gamma_i(y) = \text{sen}[\alpha_i(y+1)]; \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

Aplicando as condições de contorno, resulta que os autovalores podem ser calculados pela seguinte equação transcendente:

$$\text{sen}(2\alpha_i) = 0; \quad \alpha_i = \frac{i\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

De modo que, a propriedade da Ortogonalidade das autofunções pode ser empregada gerando:

$$\int_{-1}^1 \Gamma_i(y) \Gamma_j(y) dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i, & i = j \end{cases} \quad (4.26.a,b)$$

Em que:

$$N_i = \int_{-1}^1 \Gamma_i^2(y) dy = 1 \quad (4.27)$$

E a autofunção normalizada é:

$$\tilde{\Gamma}_i(y) = \frac{\Gamma_i(y)}{\sqrt{N_i}} = \Gamma_i(y) \quad (4.28)$$

4.2.2 Determinação do par transformada-inversa

4.2.2.1 Campo de Função Corrente

Admitindo-se que o potencial $\Psi_F(x, y)$ pode ser construído como uma expansão de autofunções, é possível definir o par transformada-inversa:

Potencial transformado:

$$\bar{\Psi}_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \Psi_F(x, y) dy \quad (4.29)$$

Fórmula de inversão:

$$\Psi_F(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(y) \bar{\Psi}_i(x) \quad (4.30)$$

4.2.2.2 Campo de Temperatura

Considera-se que o potencial $T_F(x, y)$ também seja definido pelo par transformada-inversa, logo:

Potencial transformado:

$$\bar{T}_i(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) T_F(x, y) dy \quad (4.31)$$

Fórmula de inversão:

$$T_F(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(y) \bar{T}_i(x) \quad (4.32)$$

4.2.3 Transformação integral da EDP original

4.2.3.1 Campo de Função Corrente

Tendo estabelecido o par transformada-inversa dado pelas Eqs. (4.29) e (4.30) e havendo sido definidas a autofunção e as propriedades de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido, podemos agora prosseguir com a transformação integral do problema diferencial original. Para tal, opera-se com $\int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) dy$ em ambos os lados da Eq. (4.5). Mostramos a seguir o resultado da transformação de cada um dos termos desta equação. Em todos os casos, aplica-se a fórmula de inversão (4.30) em Ψ_F e T_F e suas derivadas em x e em y .

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{\Psi}_i(x)}{dx^4} = & -\mu_i^4 \bar{\Psi}_i(x) - 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \bar{\Psi}_j(x)}{dx^2} + \frac{Re}{2} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_{ijk} \frac{d^3 \bar{\Psi}_j(x)}{dx^3} \bar{\Psi}_k(x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_{ijk} \bar{\Psi}_j(x) \frac{d \bar{\Psi}_k(x)}{dx} - D_{ijk} \frac{d \bar{\Psi}_j(x)}{dx} \bar{\Psi}_k(x) - B_{ijk} \frac{d \bar{\Psi}_j(x)}{dx} \frac{d^2 \bar{\Psi}_k(x)}{dx^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_{ij} \frac{d^3 \bar{\Psi}_j(x)}{dx^3} + F_{ij} \frac{d \bar{\Psi}_j(x)}{dx} - G_{ij} \frac{d \bar{\Psi}_j(x)}{dx} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Cujos coeficientes são mostrados a seguir:

$$A_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j''(y) dy \quad (4.34)$$

$$B_{ijk} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j(y) \tilde{\phi}_k'(y) dy \quad (4.35)$$

$$C_{ijk} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j'(y) \tilde{\phi}_k''(y) dy \quad (4.36)$$

$$D_{ijk} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j(y) \tilde{\phi}_k'''(y) dy \quad (4.37)$$

$$E_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j(y) \frac{d \Psi_{\infty}(y)}{dy} dy \quad (4.38)$$

$$F_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j''(y) \frac{d \Psi_{\infty}(y)}{dy} dy \quad (4.39)$$

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \tilde{\phi}_j(y) \frac{d^3 \Psi_{\infty}(y)}{dy^3} dy \quad (4.40)$$

4.2.3.2 Campo de Temperatura

A partir do par transformada-inversa (4.31) e (4.32), opera-se com a integral $\int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) dy$ em ambos os lados da Eq. (4.8). É mostrado a seguir o resultado da transformação de cada um dos termos desta equação, invertendo-se os potenciais pela Eq. (4.32).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}_i(x)}{dx^2} = & -\alpha_i^2 \bar{T}_i(x) + \frac{RePr}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_{ijk} \frac{d\bar{T}_j(x)}{dx} \bar{\Psi}_k(x) \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk} \bar{T}_j(x) \frac{d\bar{\Psi}_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^{\infty} J_{ij} \frac{d\bar{T}_j(x)}{dx} + \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \frac{d\bar{\Psi}_j(x)}{dx} - EcPrL_i(x) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Em que os coeficientes são descritos a seguir:

$$H_{ijk} = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \tilde{\Gamma}_j(y) \tilde{\phi}_k'(y) dy \quad (4.42)$$

$$I_{ijk} = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \tilde{\Gamma}_j'(y) \tilde{\phi}_k(y) dy \quad (4.43)$$

$$J_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \tilde{\Gamma}_j(y) \frac{d\Psi_{\infty}(y)}{dy} dy \quad (4.44)$$

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \tilde{\phi}_j(y) \frac{dT_f(y)}{dy} dy \quad (4.45)$$

$$L_i = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \left\{ \Phi + Ha^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(E_0 + \frac{d\Psi_{\infty}}{dy} \right) \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right] \right\} dy \quad (4.46)$$

4.2.3.3 Condições de Contorno

$$\bar{\Psi}_i(0) = \bar{f}_i; \quad \frac{d\bar{\Psi}_i(0)}{dx} = 0 \quad (4.47.a,b)$$

$$\bar{\Psi}_i(\infty) = 0; \quad \frac{d\bar{\Psi}_i(\infty)}{dx} = 0 \quad (4.48.a,b)$$

$$\bar{T}_i(0) = \bar{g}_i \quad (4.49)$$

$$\bar{T}_i(\infty) = 0 \quad (4.50)$$

Em que:

$$\bar{f}_i = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}_i(y) \left\{ y + 1 - q - qK \left[y \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Hay)}{Ha} \right] \right\} dy \quad (4.51)$$

$$\bar{g}_i = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) [1 - T_f(y)] dy \quad (4.52)$$

4.2.4 Implementação computacional

Visando uma metodologia com características numéricas, os coeficientes $A_{ij}, B_{ijk}, C_{ijk}, D_{ijk}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ijk}, I_{ijk}, J_{ij}$ e K_{ij} são obtidos numericamente através de regras da quadratura de Gauss para integração numérica, presente na sub-rotina QDAG da biblioteca científica IMSL (2010), sendo empregada no presente trabalho na sua versão de dupla precisão.

O coeficiente L_i pode ser obtido pelo método da integração semi-analítica (SPHAIER *et al.*, 2011) conforme a seguir:

$$L_i(x) = \sum_{k=1}^{NI} [la_k(x) LA_{ik} + lb_k(x) LB_{ik}] \quad (4.53)$$

Em que:

$$LA_{ik} = \int_{y_k}^{y_{k+1}} y \tilde{\Gamma}_i(y) dy; \quad LB_{ik} = \int_{y_k}^{y_{k+1}} \tilde{\Gamma}_i(y) dy \quad (4.54.a,b)$$

$$la_k(x) = \frac{FL(x, y_{k+1}) - FL(x, y_k)}{\Delta y}; \quad lb_k(x) = \frac{y_{k+1} FL(x, y_k) - y_k FL(x, y_{k+1})}{\Delta y} \quad (4.55.a,b)$$

E a função $FL(x, y)$ é dada por:

$$FL(x, y) = \Phi + Ha^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(E_0 + \frac{d\Psi_\infty}{dy} \right) \frac{\partial \Psi_F}{\partial y} \right] \quad (4.56)$$

Em que Φ é dado pela Eq. (4.9).

O sistema infinito de equações diferenciais ordinárias a ser resolvido no presente trabalho deve ser truncado em um número finito e suficiente de termos, N (NV para o campo de função corrente e NT para o campo de temperatura) de acordo com a precisão pré-estabelecida para avaliação dos campos transformados (quanto maior o número de termos nas expansões/séries, maior a precisão dos resultados) e resolvido através da sub-rotina BVPPFD da biblioteca IMSL (2010) na sua versão em dupla precisão.

4.2.5 Recuperação dos principais campos

Os campos originais e alguns parâmetros correlatos podem agora ser avaliados a partir de suas definições e do uso das fórmulas de inversão.

a) Campo de Função Corrente:

$$\Psi(x, y) = \Psi_{\infty}(y) + \Psi_F(x, y) = \Psi_{\infty}(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(y) \bar{\Psi}_i(x) \quad (4.57)$$

b) Campo de Velocidade:

$$u(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \Psi'_{\infty}(y) + \frac{\partial \Psi_F(x, y)}{\partial y} = \Psi'_{\infty}(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}'_i(y) \bar{\Psi}_i(x) \quad (4.58)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi_F(x, y)}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(y) \frac{d\bar{\Psi}_i(x)}{dx} \quad (4.59)$$

c) Campo de Temperatura:

$$T(x, y) = T_f(y) + T_F(x, y) = T_f(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(y) \bar{T}_i(x) \quad (4.60)$$

CAPÍTULO V

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o objetivo de resolver o sistema infinito acoplado de equações diferenciais, Eqs. (4.33) e (4.41), um código computacional na linguagem Fortran 90/95 foi desenvolvido e implementado em um microcomputador Intel Core i7 3.7 GHz do Laboratório de Simulação de Processos (LSP/UFPA).

Para a obtenção dos resultados numéricos as expansões foram truncadas em uma ordem finita de termos $N = NV = NT$ e um erro relativo global prescrito de 10^{-4} foi atribuído para a sub-rotina DBVPFD, da biblioteca científica IMSL (2010), a qual é especialmente apropriada para resolver sistemas de equações diferenciais ordinárias provenientes de problemas de valor de contorno (elípticos), como o sistema encontrado no presente trabalho. Quando não explicitado no texto, os resultados mostrados foram obtidos fazendo-se $N = NV = NT = 79$, ordem suficientemente elevada para garantia da convergência de todos os campos, para as várias situações analisadas. Os tempos de CPU para os casos estudados ficaram compreendidos na faixa de 1h51min e 12h29min.

Os resultados foram obtidos para todos os valores de número de Reynolds estudados ($Re = 40, 100$ e 300), bem como foi analisada a influência do campo magnético, ou seja, do número de Hartmann ($Ha = 4, 10$ e 50). Além de número de Reynolds e do número de Hartmann, foram variados também o número de Prandtl ($Pr = 0,1$ e $0,75$) o número de Eckert ($Ec = 0,0; 0,1$ e $1,0$) e o parâmetro elétrico imposto nos eletrodos do canal ($E_0 = -10; -0,5; 0,0$ e $1,0$). Para a relação entre as temperaturas das placas foi utilizado um único valor ($T_{w2l} = 0,0$).

A Tab. (5.1) mostra a lista dos casos que foram rodados com os valores dos parâmetros utilizados para a análise de convergência, a verificação numérica e a avaliação da sensibilidade paramétrica.

Tabela 5.1 Lista de casos rodados com os valores dos parâmetros utilizados.

CASO	Re	Ha	Pr	Ec	E_0	T_{w2l}
I	300.0	10.0	0.75	0.1	-0,5	0.0
II	40.0	10.0	0.75	0.1	-10.0	0.0
III	40.0	10.0	0.75	0.1	-0,5	0.0
IV	100.0	4.0	1.0	0.0	0.0	0.0
V	40.0	50.0	1.0	0.1	-10.0	0.0
VI	100.0	10.0	0.75	0.1	-0,5	0.0
VII	40.0	4.0	0.75	0.1	-10.0	0.0
VIII	40.0	10.0	0.1	0.1	-10.0	0.0
IX	100.0	4.0	1.0	0.1	0.0	0.0
X	100.0	4.0	1.0	1.0	0.0	0.0
XI	40.0	10.0	0.75	0.1	0.0	0.0
XII	40.0	10.0	0.75	0.1	1.0	0.0

5.1 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Define-se como convergência no método de transformação integral, o processo de incremento gradual da ordem de truncamento das séries/expansões, até que um determinado critério de erro numérico nos valores dos campos analisados (campo de velocidade, campo de temperatura, produto do fator de atrito pelo número de Reynolds e número de Nusselt local) seja atingido. Deste modo, a fim de evidenciar a natureza híbrida da metodologia aplicada, é mostrado um estudo do comportamento de convergência dos campos anteriormente citados, em diferentes posições longitudinais ao longo do canal.

Para efeitos de monitoramento da convergência são apresentados os seguintes parâmetros comumente utilizados em literatura:

- $u_c(x)$ - Campo de Velocidade na linha central;
- $T_c(x)$ - Campo de Temperatura na linha central;
- $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1}$ - Gradiente de Velocidade na placa superior;
- fRe - Produto do Fator de Atrito pelo Número de Reynolds;
- $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1}$ - Gradiente de Temperatura na placa superior;
- Nu_1 - Número de Nusselt Local na placa inferior ($= Nu_2$).

Deste modo, a análise de convergência do campo de velocidade e do campo de temperatura foi realizada no plano central do canal ($y=0$), enquanto que para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (que é função do gradiente de velocidade) e para o número de Nusselt local (que é função do gradiente de temperatura) foi realizada na placa superior ($y=1$), ambos em valores específicos do eixo longitudinal.

A Tab. (5.2) ilustra uma análise de convergência considerando $Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ (com dissipação viscosa e com aquecimento Joule) e $T_{w2l} = 0,0$.

Tabela 5.2 Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO I - $Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$.

N \ x	$u_c(x)$				$T_c(x)$				$\partial u/\partial y _{y=1}$			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
11	0.9794	1.0142	1.037	1.056	0.9936	1.013	1.023	1.031	19.97	15.47	13.03	11.89
23	1.006	1.019	1.038	1.056	1.007	1.014	1.021	1.029	21.35	13.88	12.15	11.52
35	1.006	1.019	1.038	1.057	1.007	1.014	1.021	1.029	19.58	13.66	12.12	11.51
47	1.005	1.019	1.038	1.057	1.007	1.014	1.021	1.029	19.05	13.63	12.11	11.51
59	1.005	1.019	1.038	1.057	1.007	1.014	1.021	1.029	18.92	13.62	12.11	11.51
71	1.005	1.019	1.038	1.057	1.007	1.014	1.021	1.029	18.86	13.62	12.12	11.51
N \ x	$\partial T/\partial y _{y=1}$				fRe				Nu_1			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
11	9.183	7.23	6.012	5.242	159.8	123.7	104.25	95.09	37.73	29.98	25.11	22.03
23	10.38	7.161	5.86	5.121	170.8	111.1	97.20	92.15	42.72	29.74	24.52	21.58
35	10.19	7.094	5.819	5.094	156.7	109.3	96.93	92.08	42.00	29.48	24.37	21.48
47	10.14	7.074	5.807	5.085	152.4	109.0	96.91	92.09	41.8	29.41	24.33	21.45
59	10.13	7.068	5.804	5.082	151.3	109.0	96.92	92.1	41.76	29.40	24.32	21.44
71	10.13	7.068	5.803	5.081	150.9	109.0	96.93	92.11	41.76	29.40	24.32	21.44

Observando a Tab. (5.2) para o CASO I, nota-se que as taxas de convergência para os campos de velocidade e de temperatura foram muito boas, uma vez que, com poucos termos nas séries, os mesmos já estão praticamente convergidos com quatro algarismos significativos, mesmo para regiões do escoamento muito próximas à entrada do canal.

Em contrapartida, as taxas de convergência não foram tão boas para os gradientes, principalmente o de velocidade e por consequência disso, para o produto fRe , de modo que para esses campos, mais de 71 termos são ainda necessários para a convergência de 3 algarismos significativos, especialmente na entrada do canal ($x = 0.2$ e $x = 0.4$), embora o gradiente de temperatura e o número de Nusselt local apresentem convergência com menos termos na série.

A Tab. (5.3) ilustra uma análise de convergência considerando $Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$.

Tabela 5.3 Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO II - $Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$.

N \ x	$u_c(x)$				$T_c(x)$				$\partial u / \partial y _{y=1}$			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
11	1.008	1.056	1.093	1.114	16.52	31.06	44.75	57.81	15.71	11.91	11.10	10.97
23	1.017	1.057	1.094	1.114	16.48	31.05	44.72	57.77	15.74	11.71	11.05	10.95
35	1.017	1.057	1.094	1.114	16.48	31.04	44.72	57.76	15.41	11.69	11.04	10.95
47	1.017	1.057	1.094	1.114	16.48	31.04	44.72	57.76	15.31	11.68	11.04	10.95
59	1.017	1.057	1.094	1.114	16.48	31.04	44.72	57.76	15.27	11.68	11.04	10.94
71	1.017	1.057	1.094	1.114	16.48	31.04	44.72	57.76	15.25	11.68	11.04	10.94
N \ x	$\partial T / \partial y _{y=1}$				fRe				Nu_1			
	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
11	100.3	149.4	188	219.4	125.7	95.29	88.79	87.77	28.91	23.12	20.33	18.55
23	100.4	150.6	188.8	220.0	125.9	93.67	88.36	87.61	28.97	23.31	20.43	18.61
35	100.9	150.8	188.9	220.0	123.3	93.49	88.31	87.58	29.09	23.34	20.44	18.61
47	101.0	150.9	188.9	220.0	122.5	93.44	88.29	87.56	29.14	23.35	20.45	18.62
59	101.1	150.9	188.9	220.0	122.2	93.42	88.28	87.56	29.16	23.35	20.45	18.62
71	101.1	150.9	188.9	220.0	122.0	93.42	88.28	87.56	29.17	23.35	20.45	18.62

Ao observar a Tab. (5.3) para o CASO II, destaca-se que o comportamento da convergência é bastante semelhante ao do CASO I, ressaltando que os gradientes de velocidade e de temperatura na entrada do canal possuem uma convergência mais lenta e desse modo, um número elevado de termos ($N > 71$) são necessários para a convergência dos algarismos significativos requeridos para o gradiente de velocidade e para o produto fRe . Quanto ao gradiente de temperatura e o número de Nusselt local a convergência é adequada com menos termos na série, ainda que na entrada do canal o número de Nusselt não apresente convergência satisfatória.

A Tab. (5.4) ilustra uma análise de convergência considerando $Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$.

Tabela 5.4 Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO III - $Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$.

N	x	$u_c(x)$				$T_c(x)$				$\partial u/\partial y _{y=1}$			
		0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0
11		1.008	1.056	1.114	1.111	1.047	1.096	1.173	1.264	15.71	11.91	10.97	11.12
23		1.017	1.057	1.114	1.111	1.049	1.095	1.172	1.263	15.74	11.71	10.95	11.12
35		1.017	1.057	1.114	1.111	1.048	1.095	1.172	1.263	15.41	11.69	10.95	11.12
47		1.017	1.057	1.114	1.111	1.048	1.095	1.172	1.262	15.31	11.68	10.95	11.12
59		1.017	1.057	1.114	1.111	1.048	1.095	1.172	1.262	15.27	11.68	10.94	11.12
71		1.017	1.057	1.114	1.111	1.048	1.095	1.172	1.262	15.25	11.68	10.94	11.12

N	x	$\partial T/\partial y _{y=1}$				fRe				Nu_1			
		0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0
11		5.427	3.741	2.874	2.611	125.7	95.29	87.77	88.92	23.55	16.54	12.82	11.52
23		5.551	3.716	2.863	2.609	125.9	93.67	87.61	88.92	24.14	16.45	12.78	11.52
35		5.564	3.713	2.860	2.609	123.3	93.49	87.58	88.92	24.20	16.44	12.77	11.52
47		5.576	3.714	2.859	2.609	122.5	93.44	87.56	88.92	24.26	16.45	12.77	11.52
59		5.586	3.715	2.859	2.609	122.2	93.42	87.56	88.92	24.30	16.45	12.77	11.52
71		5.594	3.715	2.858	2.609	122.0	93.42	87.55	88.92	24.33	16.45	12.76	11.52

Da Tab. (5.4) para o CASO III nota-se que os campos de velocidade e de temperatura convergem com um número de termos baixo, porém os gradientes de velocidade e de temperatura na entrada do canal, bem como os parâmetros correlatos apresentam uma convergência apenas no terceiro algarismo significativo, de modo que, para uma convergência mais apurada, um número elevado de termos ($N > 71$) deve ser necessários.

Destaca-se aqui que foi utilizado para a convergência o ponto $x = 2$ em que o regime tem grandes chances de estar estabelecido, implicando que nesta posição a maioria dos parâmetros observados possui convergência acelerada para os algarismos significativos requeridos.

A Tab. (5.5) ilustra uma análise de convergência considerando $Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,0$ (sem dissipação viscosa e sem aquecimento Joule); $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$.

Tabela 5.5 Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO IV - $Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,0$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$.

$N \backslash x$	$u_c(x)$				$T_c(x)$				$\partial u / \partial y _{y=1}$			
	0.1	1.0	2.0	5.0	0.1	1.0	2.0	5.0	0.1	1.0	2.0	5.0
11	0.9580	1.159	1.260	1.284	0.9845	0.9989	0.9705	0.7943	19.84	5.809	5.366	5.329
23	0.9979	1.161	1.260	1.284	0.9992	0.9972	0.9678	0.7912	26.56	5.778	5.366	5.329
35	1.003	1.161	1.260	1.284	1.000	0.9970	0.9674	0.7908	26.62	5.777	5.366	5.329
47	1.003	1.161	1.260	1.284	1.000	0.9969	0.9673	0.7907	25.72	5.777	5.366	5.329
59	1.003	1.161	1.260	1.284	1.000	0.9969	0.9672	0.7906	25.08	5.777	5.366	5.329
71	1.003	1.161	1.260	1.284	1.000	0.9969	0.9672	0.7906	24.72	5.777	5.366	5.329
$N \backslash x$	$\partial T / \partial y _{y=1}$				fRe				Nu_1			
	0.1	1.0	2.0	5.0	0.1	1.0	2.0	5.0	0.1	1.0	2.0	5.0
11	8.486	2.341	1.746	1.205	158.7	46.47	42.93	42.63	35.58	11.31	9.300	8.292
23	9.788	2.308	1.732	1.199	212.5	46.22	42.93	42.63	41.44	11.20	9.264	8.284
35	9.658	2.303	1.730	1.198	213.0	46.22	42.93	42.63	40.95	11.18	9.258	8.283
47	9.541	2.302	1.729	1.198	205.8	46.22	42.93	42.63	40.47	11.18	9.257	8.283
59	9.492	2.301	1.729	1.198	200.6	46.22	42.93	42.63	40.26	11.18	9.256	8.283
71	9.472	2.301	1.729	1.198	197.8	46.22	42.93	42.63	40.18	11.18	9.256	8.283

A convergência para os campos de velocidade e de temperatura no CASO IV – Tab. (5.5) – ocorre de forma acelerada assim como no CASO III. Aqui, evidencia-se também que os quatro parâmetros correlatos aos campos originais mostram uma convergência apenas no terceiro algarismo significativo, de modo que, como no caso anterior, para uma convergência mais acurada, um número elevado de termos ($N > 71$) devem ser utilizados.

Ressalta-se que, nesse caso, foi utilizado o ponto $x = 5$ onde a maioria dos parâmetros analisados possui convergência acelerada para os algarismos significativos requeridos.

A Tab. (5.6) ilustra uma análise de convergência considerando $Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$.

Tabela 5.6 Análise de convergência dos principais campos, em diferentes posições axiais. CASO V - $Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$.

N	x	$u_c(x)$				$T_c(x)$				$\partial u/\partial y _{y=1}$			
		0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0
3		1.013	1.023	1.020	1.020	428.7	803.0	1560	3607	51.06	51.01	51.02	51.02
11		1.014	1.023	1.020	1.020	399.1	790.0	1558	3607	51.09	50.97	51.02	51.02
19		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.07	50.94	51.02	51.02
27		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.05	50.92	51.03	51.02
35		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.04	50.91	51.03	51.02
43		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.03	50.90	51.03	51.02
51		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.02	50.89	51.03	51.02
59		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.02	50.89	51.03	51.02
63		1.014	1.023	1.020	1.020	398.9	790.0	1558	3607	51.02	50.89	51.03	51.02
N	x	$\partial T/\partial y _{y=1}$				fRe				Nu_1			
		0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0	0.2	0.4	0.8	2.0
3		3401	4514	6313	10025	408.5	408.0	408.2	408.2	38.48	26.99	20.3	15.19
11		2975	4370	6295	10029	408.7	407.8	408.2	408.2	34.16	26.20	20.25	15.19
19		2972	4375	6299	10031	408.5	407.5	408.2	408.2	34.13	26.23	20.26	15.19
27		2976	4378	6301	10032	408.4	407.4	408.2	408.2	34.18	26.25	20.26	15.20
35		2979	4380	6303	10033	408.3	407.3	408.2	408.2	34.21	26.26	20.27	15.20
43		2981	4381	6303	10034	408.2	407.2	408.2	408.2	34.23	26.26	20.27	15.20
51		2982	4382	6304	10034	408.2	407.2	408.2	408.2	34.24	26.27	20.27	15.20
59		2982	4382	6304	10034	408.2	407.2	408.2	408.2	34.25	26.27	20.27	15.20
63		2983	4383	6304	10034	408.2	407.2	408.2	408.2	34.26	26.27	20.27	15.20

Avaliando a Tab. (5.6) percebe-se que as taxas de convergência para os campos de velocidade e de temperatura são excelentes. É importante ressaltar que, para a maioria dos parâmetros analisados, a convergência com 4 algarismos significativos é alcançada com $N = 51$. Se forem considerados 3 algarismos com essa mesma quantidade de termos na série a convergência é alcançada satisfatoriamente para todos os 6 campos.

Quanto ao número de Hartmann, foi observado que a convergência para elevados valores de Ha , como é notado no CASO V ($Ha = 50$), a eficiência do filtro aplicado no presente estudo pode ser facilmente percebida, uma vez que nesses casos o processo difusivo é predominante, fazendo com que o filtro se mostre satisfatório para obtenção dos resultados, proporcionando excelentes taxas de convergência. Já quando se tratam de baixos números de Hartmann, como nos CASOS I a IV ($Ha = 10$ ou $Ha = 4$), o processo de convecção é predominante, de modo que, a convergência nesses casos é um pouco mais lenta.

5.2 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

As Figs. (5.1) a (5.5) mostram uma comparação entre os resultados obtidos aplicando a presente metodologia com os resultados da literatura (Hwang e Fan, 1963; Manohar, 1966 e Rêgo, 2010), para a componente axial do campo de velocidade em diferentes posições transversais do canal (y) e para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) em diferentes pontos do eixo longitudinal (x).

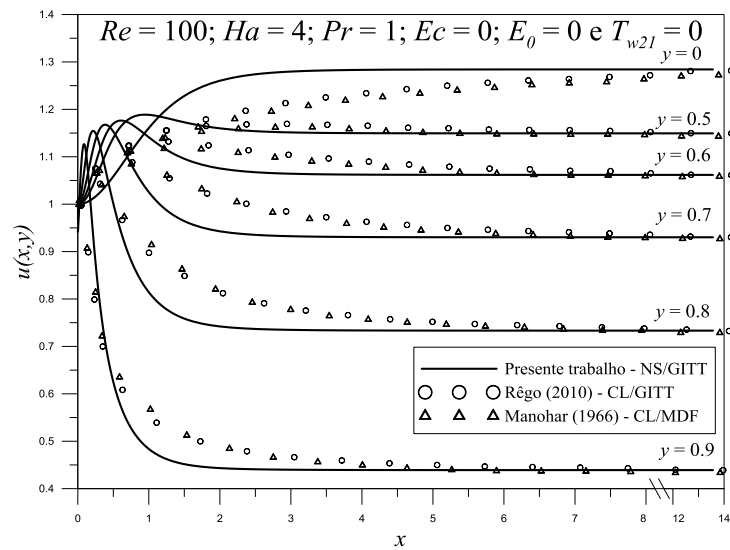


Figura 5.1 Comparação com os resultados de Manohar (1966) e Rêgo (2010) da componente axial de velocidade ao longo do canal, em diferentes posições transversais, para $Re = 100$ e $Ha = 4$ (CASO IV).

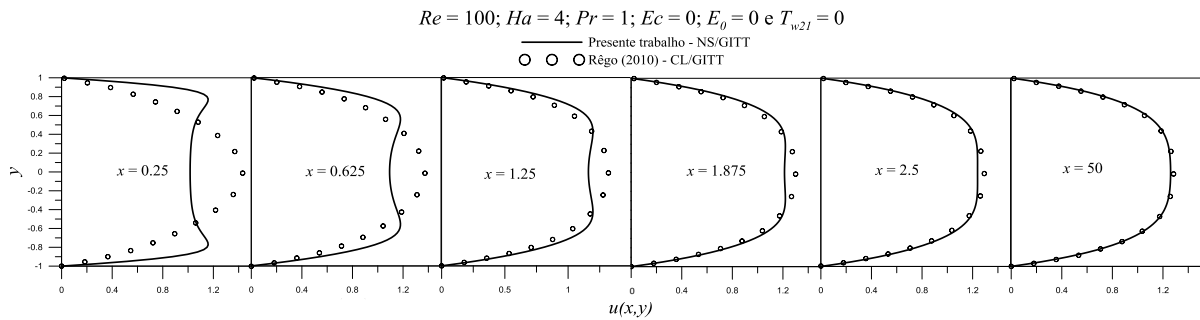


Figura 5.2 Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 100$ e $Ha = 4$ (CASO IV).

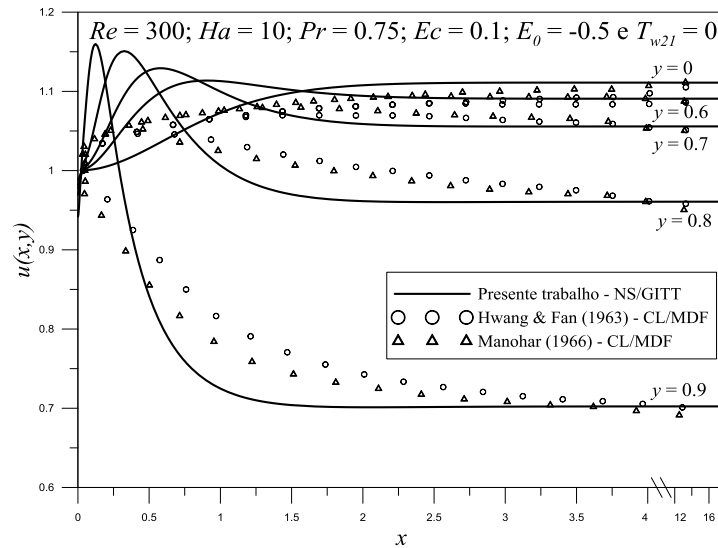


Figura 5.3 Comparação com os resultados de Hwang e Fan (1963) e Manohar (1966) da componente axial de velocidade ao longo do canal, em diferentes posições transversais, para $Re = 300$ e $Ha = 10$ (CASO I).

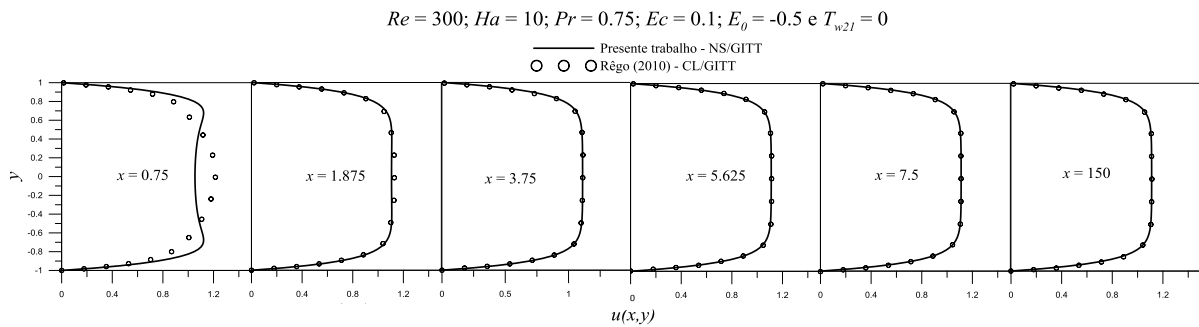


Figura 5.4 Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 300$ e $Ha = 10$ (CASO I).

A finalidade principal das Figs. (5.1) a (5.4) é de verificar o resultado da presente metodologia, tanto para a componente axial ao longo do canal em diferentes posições transversais (y) utilizando resultados de Manohar (1966) e Rêgo (2010) para o CASO IV e Hwang e Fan (1963) e Manohar (1966) para o CASO I, como para o desenvolvimento do perfil de velocidade em algumas posições longitudinais (x) com os dados de Rêgo (2010) (CASO IV e CASO I).

Observando as Figs. (5.1) a (5.4), é possível afirmar que os resultados do presente trabalho para o campo de velocidade axial ao longo do canal foram verificados satisfatoriamente com aqueles de Hwang e Fan (1963), Manohar (1966) e Rêgo (2010) uma vez que estes perfis possuem uma excelente concordância global com os resultados da literatura nas regiões longe da entrada, embora os perfis de velocidade exibam o fenômeno "overshooting" na entrada do canal.

Os *overshoots* de velocidade surgem por conta de um gradiente de pressão negativo estabelecido perto da região da parede a uma distância muito curta da entrada do canal ($x = 0$),

enquanto que um gradiente de pressão positivo existe na região perto da linha central ($y = 0$), de modo que, o escoamento perto da linha central não é imediatamente acelerado e os *overshoots* de velocidade são formados (SPARROW, 1964).

Esse comportamento divergente na entrada do canal em função dos *overshoots* é bem conhecido e perfeitamente explicável, uma vez que os estudos utilizados na verificação do presente trabalho formularam seus modelos utilizando Camada Limite (referenciada nas figuras por CL), enquanto que o presente estudo aplicou a equação de Navier-Stokes (referenciada nas figuras por NS) na sua forma mais completa possível, a qual mantém o termo das forças viscosas na sua formulação a ponto de incorporar nos resultados tais efeitos na entrada do canal, e deste modo, nota-se uma influência direta do tipo de formulação matemática e das simplificações adotadas nos resultados obtidos em ambos os trabalhos.

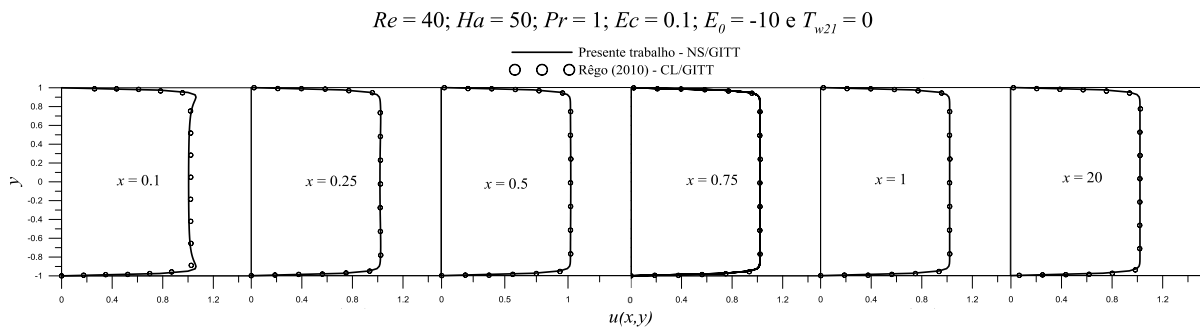


Figura 5.5 Comparação com os resultados de Rêgo (2010) para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal, para $Re = 40$ e $Ha = 50$ (CASO V).

Na Fig. (5.5) é possível observar a verificação do CASO V ($Re = 40$ e $Ha = 50$) visualizando-se uma excelente concordância entre os resultados para o desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) do presente trabalho com os de Rêgo (2010). Destaca-se que para valores de número de Hartmann elevados ($Ha = 50$), como neste caso, o desenvolvimento do campo de velocidade apresenta perfil empistonado. Novamente é observado o mesmo comportamento do perfil na entrada do canal (*overshooting*), sendo possível afirmar que este é mais próximo do comportamento real do escoamento, em função da formulação mais completa utilizada no presente trabalho (equação de Navier-Stokes).

5.3 SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA

Na obtenção de modelos de sistemas físicos parte-se da hipótese de que os valores dos parâmetros são conhecidos e constantes. Assim, o objetivo aqui é estudar o efeito que a variação paramétrica tem sobre o escoamento e o desenvolvimento térmico. Os parâmetros

adimensionais avaliados foram: número de Reynolds, número de Hartmann, número de Eckert, parâmetro elétrico e número de Prandtl.

O número de Reynolds é um parâmetro adimensional usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de fluidos sobre uma superfície e é representado pela razão entre as forças de inércia e as forças viscosas.

O número Hartmann é um parâmetro adimensional definido como a razão entre a força eletromagnética e a força viscosa, que desempenha um papel importante na magnetohidrodinâmica.

O número de Eckert é o parâmetro adimensional que expressa a relação entre a energia cinética e a entalpia de uma corrente, sendo usado para caracterizar a dissipação viscosa.

O parâmetro elétrico representa um número adimensional que está relacionado diretamente com a diferença de potencial elétrico imposta no canal, e deste modo, é responsável por dimensionar, em parte, o fenômeno do aquecimento Joule.

O número de Prandtl é o parâmetro adimensional que relaciona a taxa de difusão viscosa e a taxa de difusão térmica dentro do fluido, representando a medida da eficiência das transferências de quantidade de movimento e de calor nas camadas limites hidrodinâmica e térmica.

5.3.1 Influência do número de Reynolds

5.3.1.1 Campo de velocidade

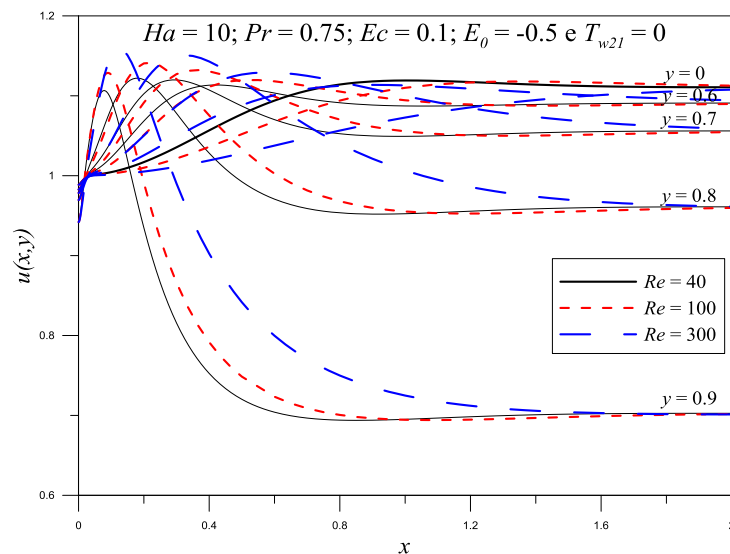


Figura 5.6 Influência do número de Reynolds no campo de velocidade - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).

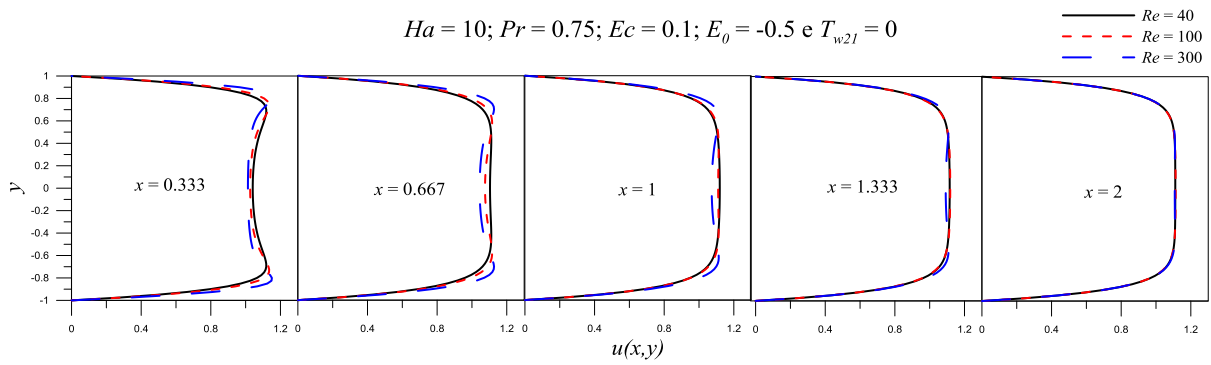


Figura 5.7 Influência do número de Reynolds no desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).

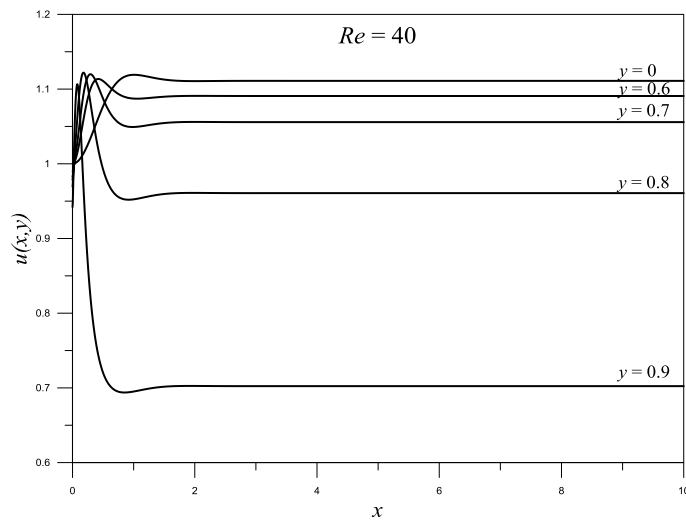


Figura 5.8 Perfil de velocidade para o CASO III ($Re = 40; Ha = 10; Pr = 0,75; Ec = 0,1; E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$).

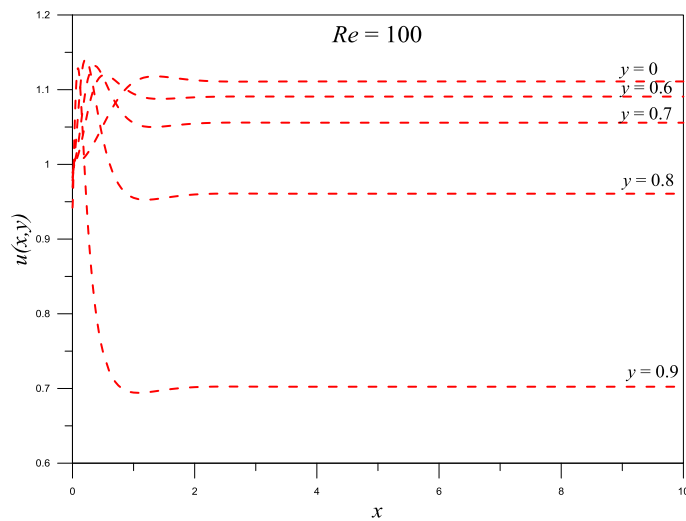


Figura 5.9 Perfil de velocidade para o CASO VI ($Re = 100; Ha = 10; Pr = 0,75; Ec = 0,1; E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$).

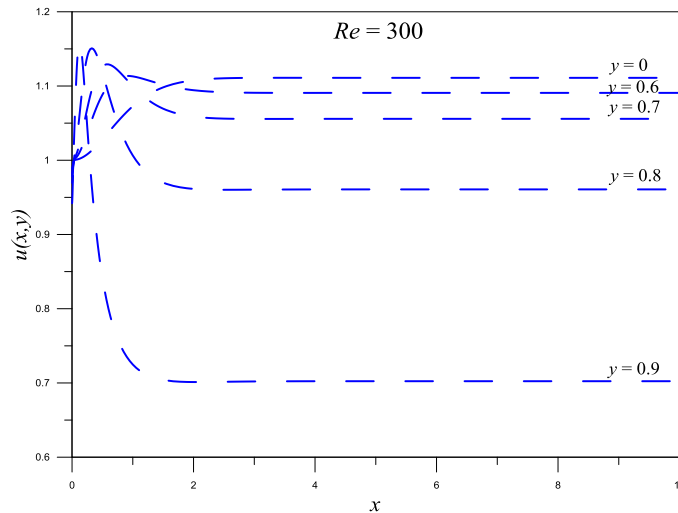


Figura 5.10 Perfil de velocidade para o CASO I ($Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$).

Quando é analisada a influência do número de Reynolds, valores menores ($Re = 40$ e 100) indicam que as forças de inércia ($\rho U \ell$) são quase da mesma ordem de grandeza das forças viscosas (μ), de modo que, neste caso, o escoamento se desenvolva mais rapidamente bem próximo da entrada do canal ($x = 1$), quando se compara com números de Reynolds elevados ($Re = 300$) em que o escoamento se desenvolve em $x = 2$ como pode ser visualizado nas Figs. (5.8) a (5.10).

Outra forma de avaliar este comportamento é observar que para Reynolds maiores ($Re = 300$) a escala de comprimento geométrico (ℓ) é muito maior do que a escala de comprimento viscoso (ν/U), e desse modo o escoamento se desenvolve mais longe da entrada do canal.

Ao mesmo tempo, observa-se que valores superiores de Reynolds ($Re = 300$) provocam *overshoots* mais elevados na entrada do canal (Fig. 5.10) quando comparado com Reynolds menores ($Re = 40$ e 100).

5.3.1.2 Campo de temperatura

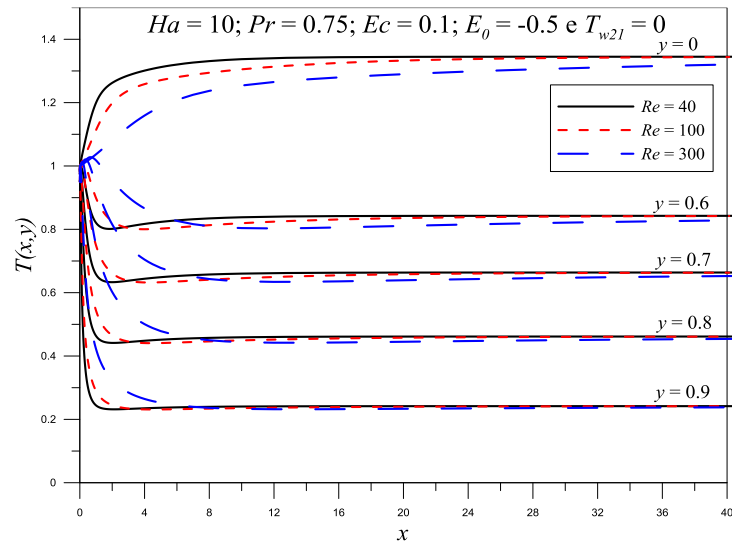


Figura 5.11 Influência do número de Reynolds no campo de temperatura - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).

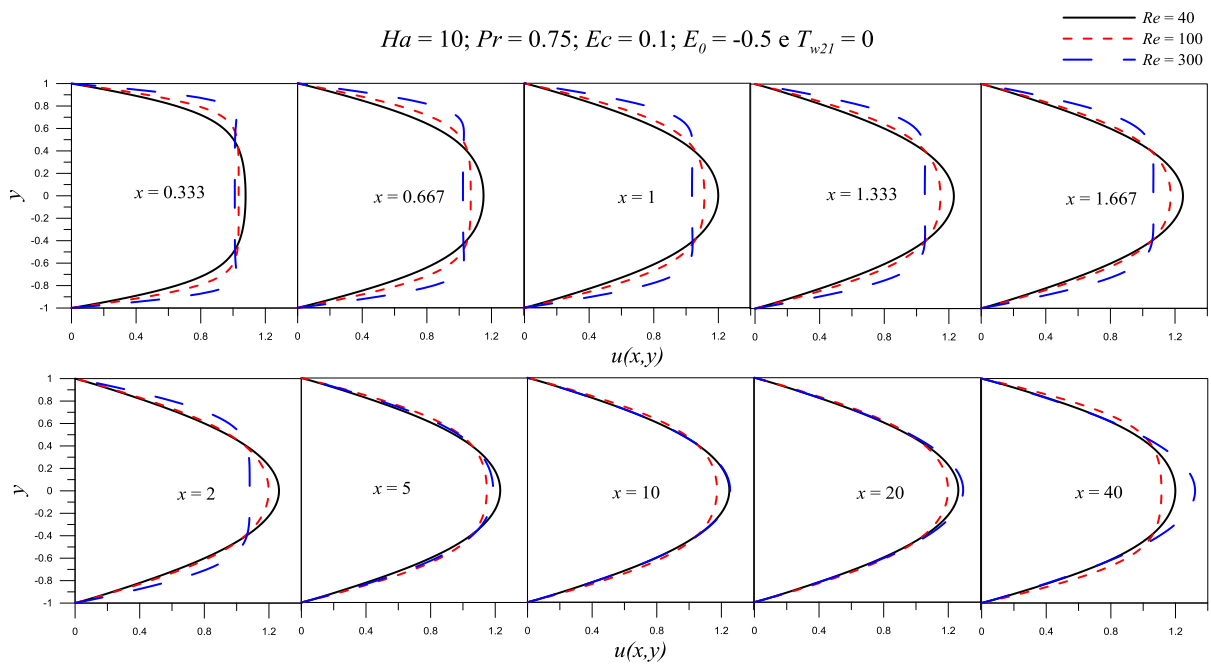


Figura 5.12 Influência do número de Reynolds no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO III ($Re = 40$), CASO VI ($Re = 100$) e CASO I ($Re = 300$).

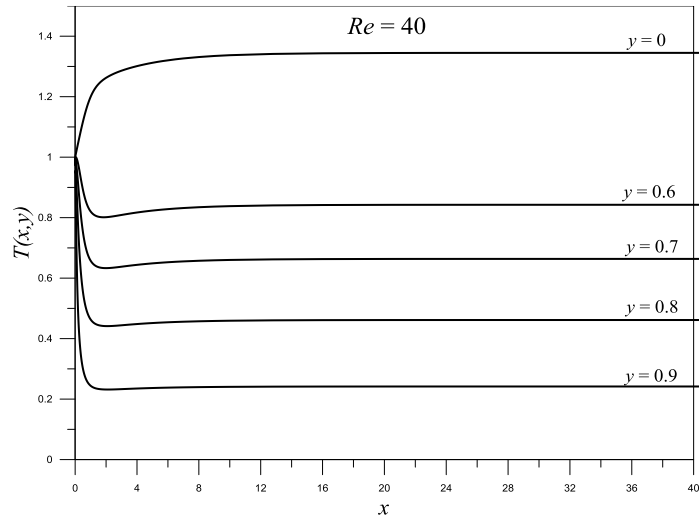


Figura 5.13 Perfil de temperatura para o CASO III ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).

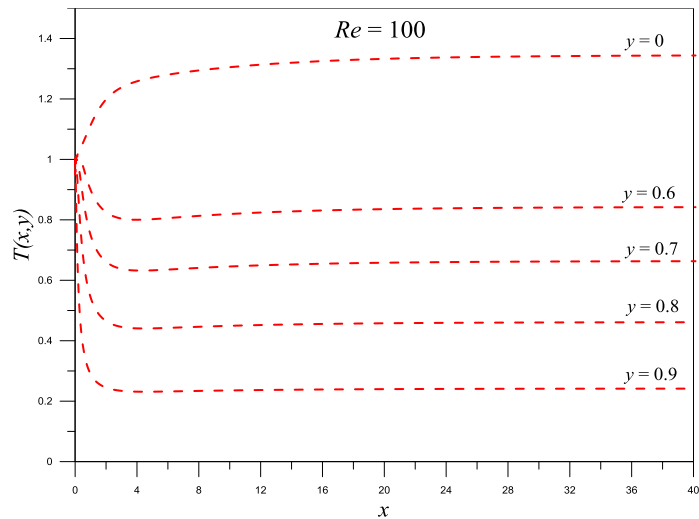


Figura 5.14 Perfil de temperatura para o CASO VI ($Re = 100$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).

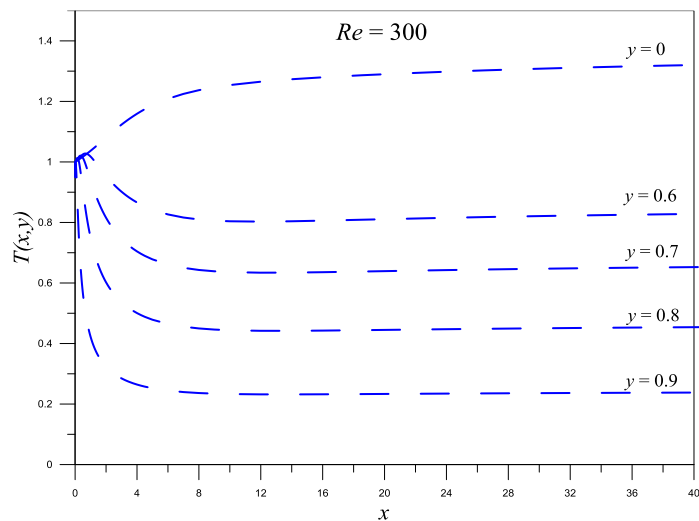


Figura 5.15 Perfil de temperatura para o CASO I ($Re = 300$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w21} = 0,0$).

A Fig. (5.12) mostra que quanto maior o número de Reynolds, mais longe da entrada do canal o regime térmico é estabelecido. Assim, valores maiores ($Re = 300$) fazem com que o desenvolvimento térmico se estabeleça mais distante da entrada do canal ($x > 2$), quando se compara com números de Reynolds baixos ($Re = 40$ e 100) em que o campo de temperatura praticamente se desenvolve em $x = 2$ como pode ser visualizado nas Figs. (5.13) a (5.15).

Vale salientar que quando se analisa a influência do número de Reynolds no desenvolvimento térmico foi observado que para a faixa de valores avaliada, o problema não pode ser considerado um problema de desenvolvimento simultâneo uma vez que o comprimento de entrada hidrodinâmico não tem a mesma ordem de grandeza do comprimento de entrada térmico.

Este tipo de escoamento é chamado de perfil térmico em desenvolvimento e, neste caso, a transferência de calor para o fluido inicia-se após uma seção isotérmica, responsável por permitir o desenvolvimento da velocidade antes de o fluido penetrar na zona de transferência de calor, uma vez que a convecção térmica ocorre praticamente sob a condição de um regime completamente estabelecido.

5.3.2 Influência do número de Hartmann

5.3.2.1 Campo de velocidade

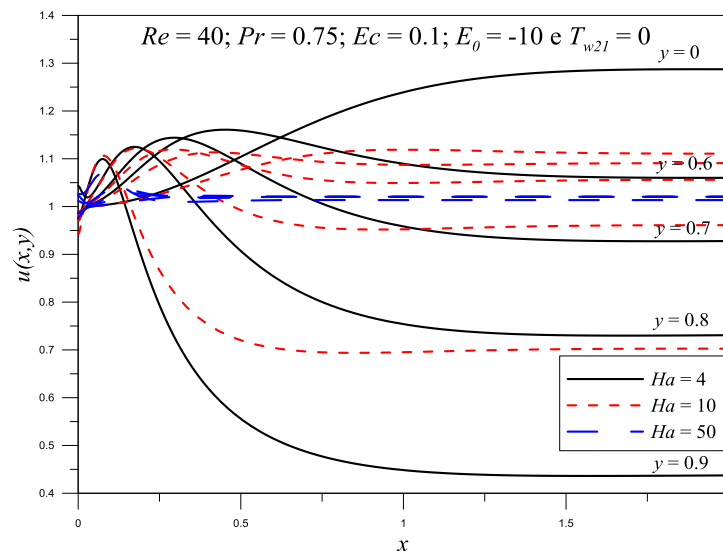


Figura 5.16 Influência do número de Hartmann no campo de velocidade - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).

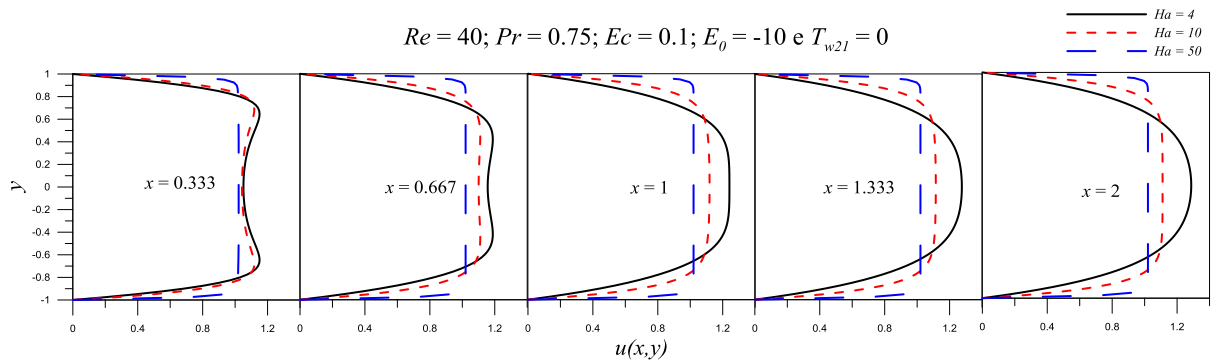


Figura 5.17 Influência do número de Hartmann no desenvolvimento do perfil de velocidade (componente axial) ao longo do canal - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).

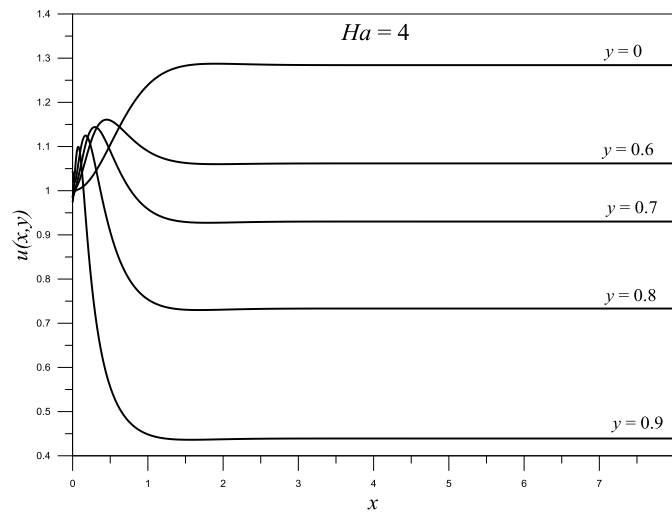


Figura 5.18 Perfil de velocidade para o CASO VII ($Re = 40; Ha = 4; Pr = 0,75; Ec = 0,1; E_0 = -10 \text{ e } T_{w2l} = 0,0$).

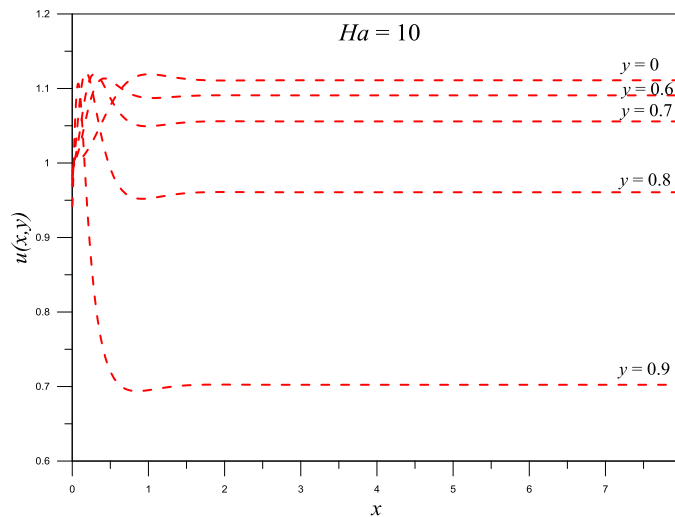


Figura 5.19 Perfil de velocidade para o CASO II ($Re = 40; Ha = 10; Pr = 0,75; Ec = 0,1; E_0 = -10 \text{ e } T_{w2l} = 0,0$).

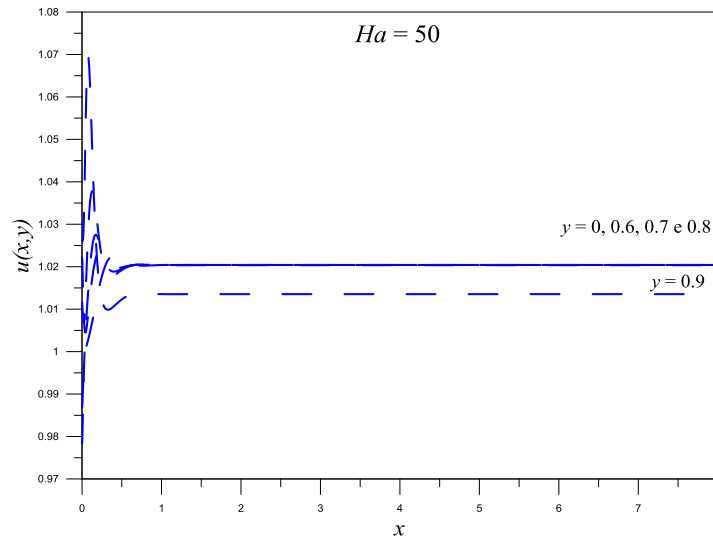


Figura 5.20 Perfil de velocidade para o CASO V ($Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

Como é possível perceber a partir de uma rápida visualização, números de Hartmann elevados ($Ha = 50$) indicam que as forças eletromagnéticas ($B\ell\sigma^{1/2}$) têm intensidade muito maior do que as forças viscosas ($\mu^{1/2}$), de modo que o escoamento se desenvolve mais rapidamente (já em $x = 0.333$) do que para números de Hartmann menores ($Ha = 4$ e 10), onde estes se desenvolvem com $x = 1.333$, de acordo com a Fig. (5.17).

No geral, o efeito global do aumento do número de Hartmann é tornar o perfil de velocidade mais plano ou mais próximo de um perfil empistonado ao longo do canal, conforme visto na Fig. (5.17) na curva de $Ha = 50$, ao contrário de valores mais baixos de Ha (4 e 10) em que a curva tem um perfil parabólico. A consequência disto é que para valores de Hartmann elevados se traduzem em elevação dos gradientes de velocidades (e logo, fator de atrito, pressão e gradiente de pressão).

5.3.2.2 Campo de temperatura

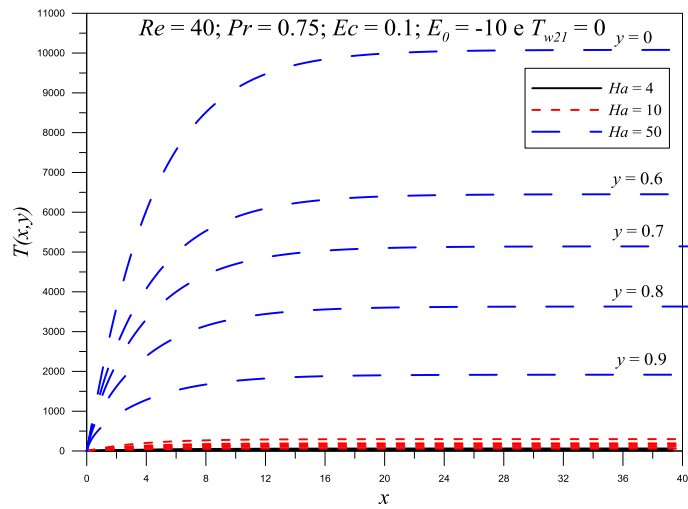


Figura 5.21 Influência do número de Hartmann no campo de temperatura - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).

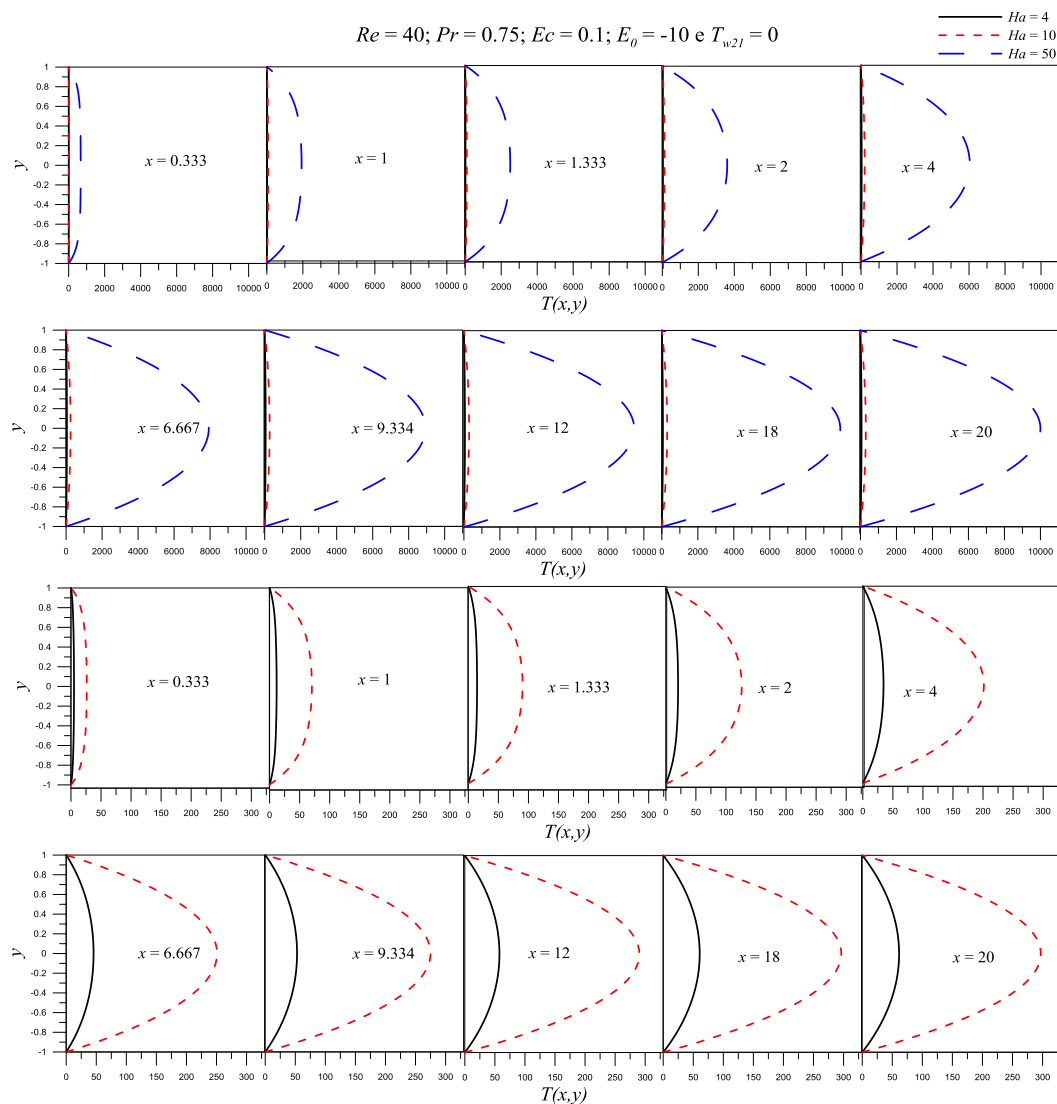


Figura 5.22 Influência do número de Hartmann no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO VII ($Ha = 4$), CASO II ($Ha = 10$) e CASO V ($Ha = 50$).

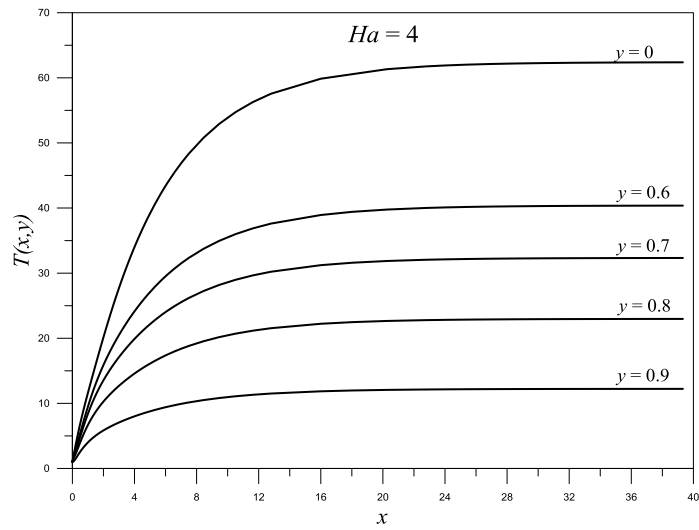


Figura 5.23 Perfil de temperatura para o CASO VII ($Re = 40$; $Ha = 4$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

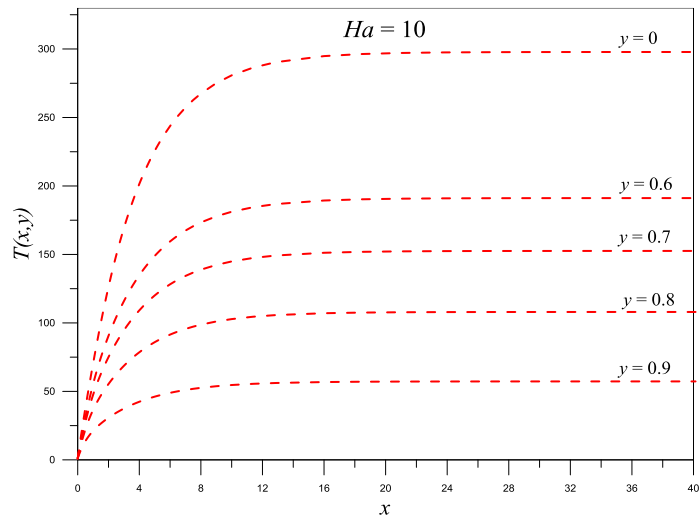


Figura 5.24 Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

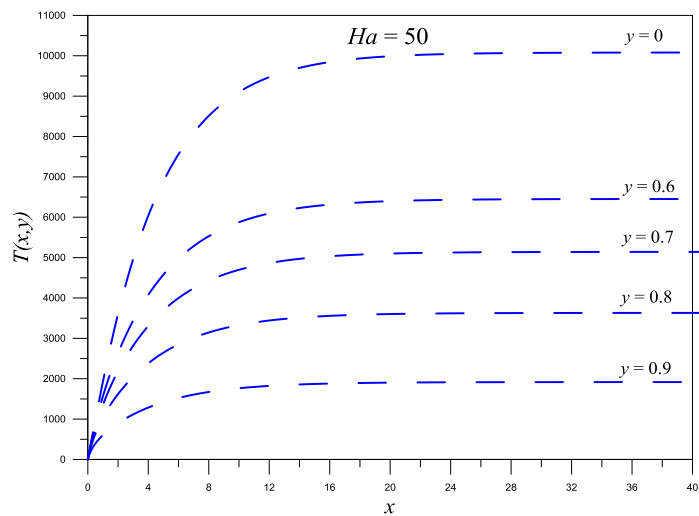


Figura 5.25 Perfil de temperatura para o CASO V ($Re = 40$; $Ha = 50$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

A Fig. (5.22) ilustra o comportamento do perfil térmico com o aumento do número de Hartmann para os três casos avaliados, de modo que para $Ha = 50$ a intensidade do campo de temperatura é mais elevada com relação à $Ha = 4$ e 10 em função da intensidade do campo magnético transversal ser maior.

Na posição $x = 16$, pode se dizer que todos os perfis térmicos já se desenvolveram, exceto o de $Ha = 4$, que por ser o valor mais baixo dentre os avaliados, desenvolve-se um pouco depois dos demais casos. Deste modo, pode se afirmar que o regime térmico é estabelecido tão mais próximo da entrada do canal, quanto maior for o valor de Ha , como pode ser visualizado nas Figs. (5.23) a (5.25).

Finalmente, é importante ressaltar que na análise do número de Hartmann, pode ser considerado que, desprezando-se a região muito próxima à entrada do canal, a transferência de calor por convecção deve ocorrer praticamente sob uma condição de escoamento completamente desenvolvido, isto é, pode-se tratar o problema como um problema de entrada térmica (perfil térmico em desenvolvimento), e não de desenvolvimento simultâneo, uma vez que o comprimento de entrada hidrodinâmico é muito pequeno.

5.3.3 Influência do número de Eckert

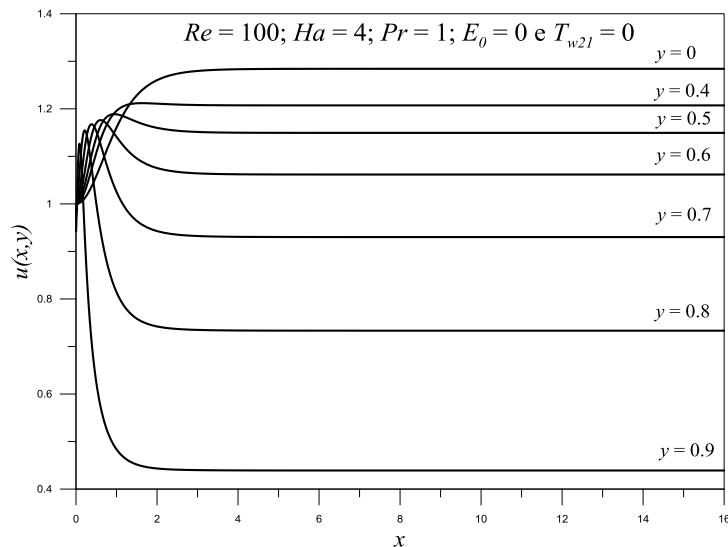


Figura 5.26 Perfil de velocidade para: CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).

5.3.3.1 Campo de temperatura

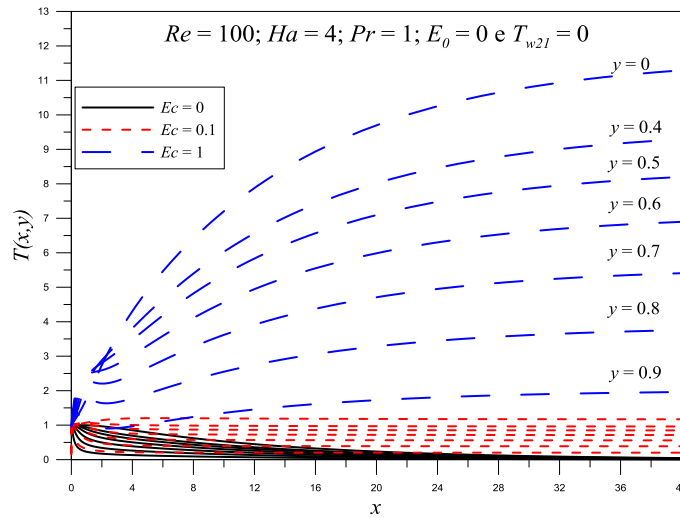


Figura 5.27 Influência do número de Eckert no campo de temperatura - CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).

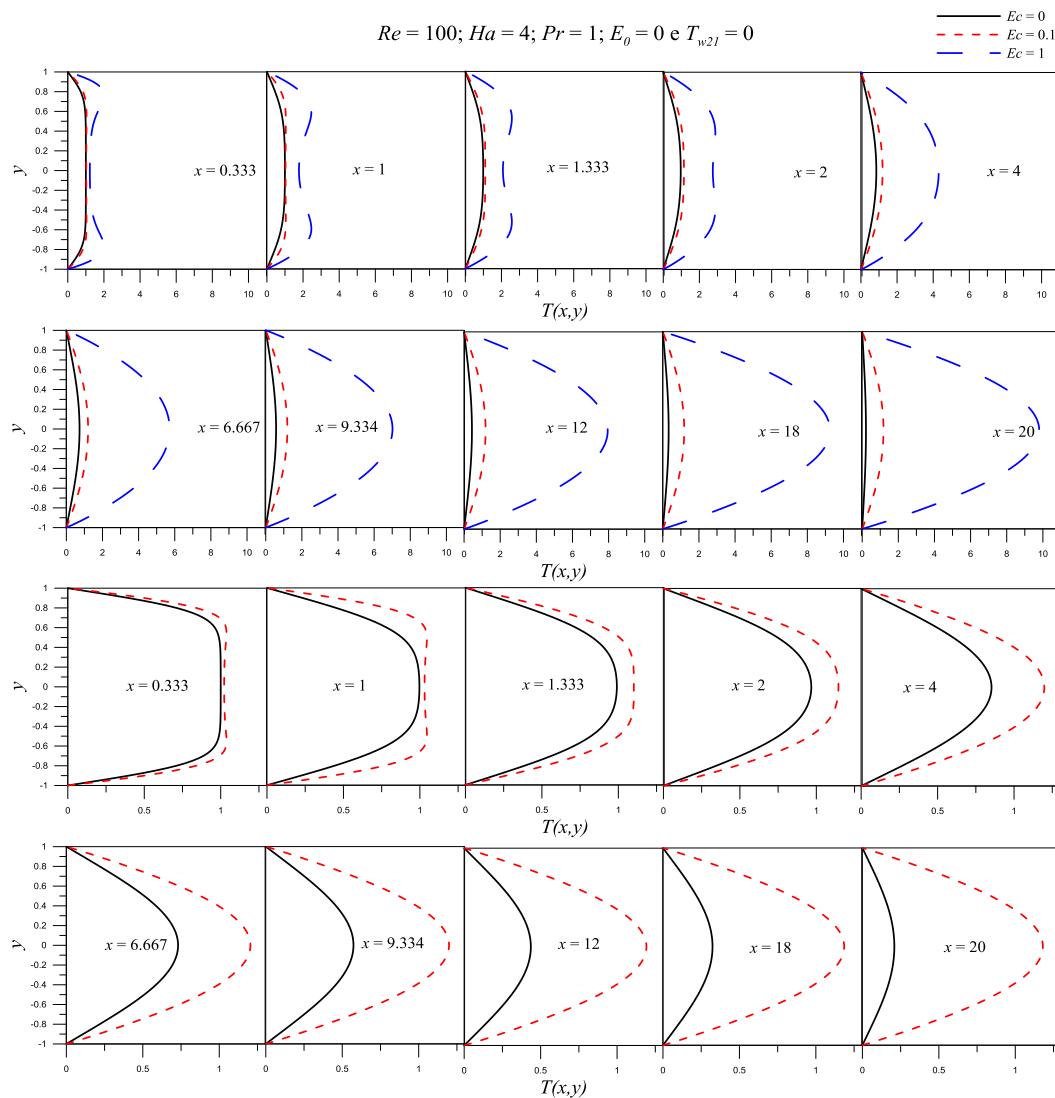


Figura 5.28 Influência do número de Eckert no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO IV ($Ec = 0,0$), CASO IX ($Ec = 0,1$) e CASO X ($Ec = 1$).

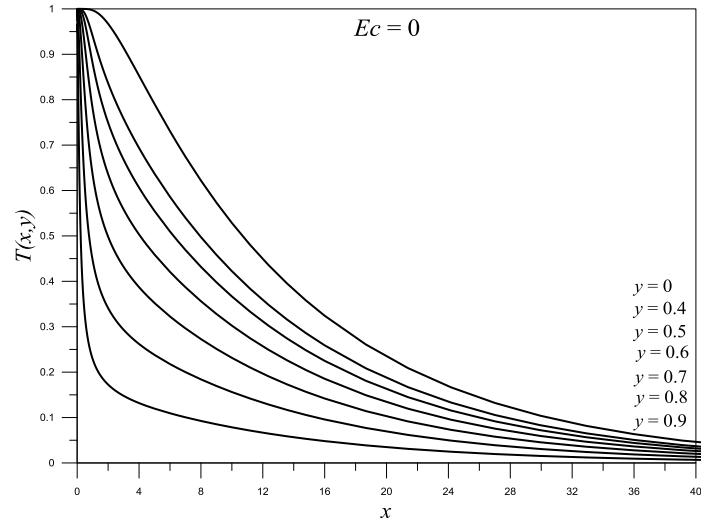


Figura 5.29 Perfil de temperatura para o CASO IV ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,0$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).

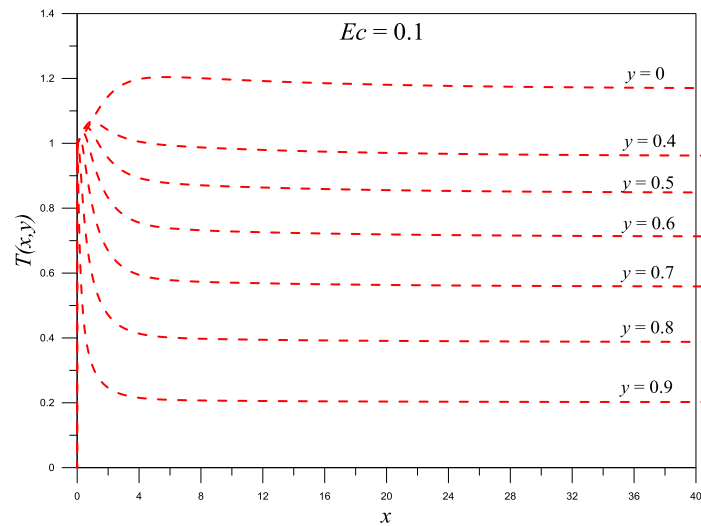


Figura 5.30 Perfil de temperatura para o CASO IX ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).

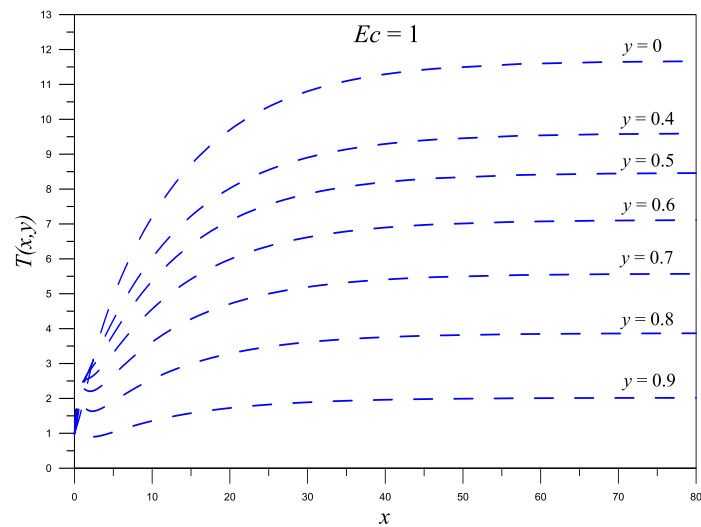


Figura 5.31 Perfil de temperatura para o CASO X ($Re = 100$; $Ha = 4$; $Pr = 1,0$; $Ec = 1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).

A Fig. (5.27) ilustra o comportamento do perfil de temperatura com a elevação do número de Eckert para os três casos avaliados, de modo que para $Ec = 1$ (Fig. 5.31), a energia cinética é numericamente igual a entalpia (dissipação viscosa é maior) e, por consequência disso, o perfil térmico se estabelece longe da entrada do canal ($x > 40$), mesmo que o perfil hidrodinâmico já tenha se desenvolvido próximo de $x = 5$. O mesmo acontece na Fig. 5.29, em que $Ec = E_0 = 0$ (sem dissipação viscosa e sem a contribuição elétrica do aquecimento Joule).

No caso em que $Ec = 0.1$, a energia cinética (U^2) é menor do que a entalpia ($Cp\Delta T$), resultando que o perfil térmico se estabelece logo em $x = 5$ e como consequência pode se afirmar que este caso é de desenvolvimento simultâneo (térmico e hidrodinâmico) uma vez que $L_h = L_t = 5$, como pode ser observado nas Figs. (5.26) e (5.30), e neste caso, tanto o desenvolvimento hidrodinâmico como o térmico se iniciam ao mesmo tempo.

É necessário destacar que na análise do número de Eckert o problema físico dos CASOS IV e XIII pode ser considerado como um problema de entrada térmica, já que o comprimento de entrada hidrodinâmico é muito pequeno, em comparação com o comprimento de entrada térmico.

5.3.4 Influência do parâmetro elétrico

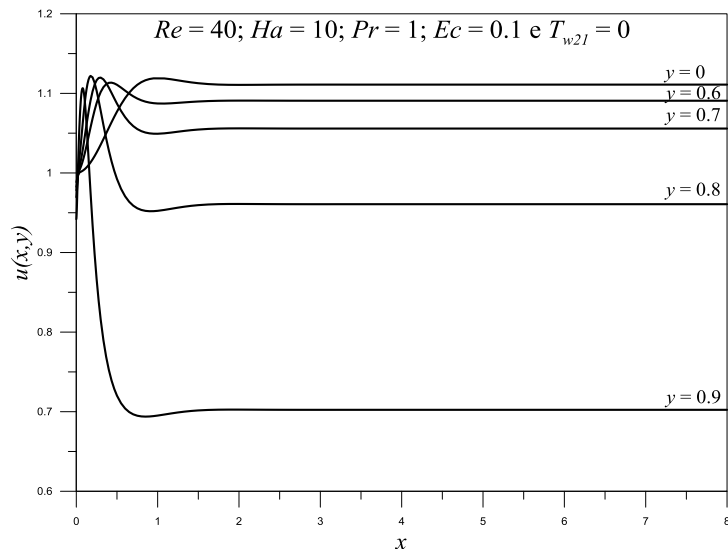


Figura 5.32 Perfil de velocidade para: CASO II ($E_0 = -10$), CASO III ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).

5.3.4.1 Campo de temperatura

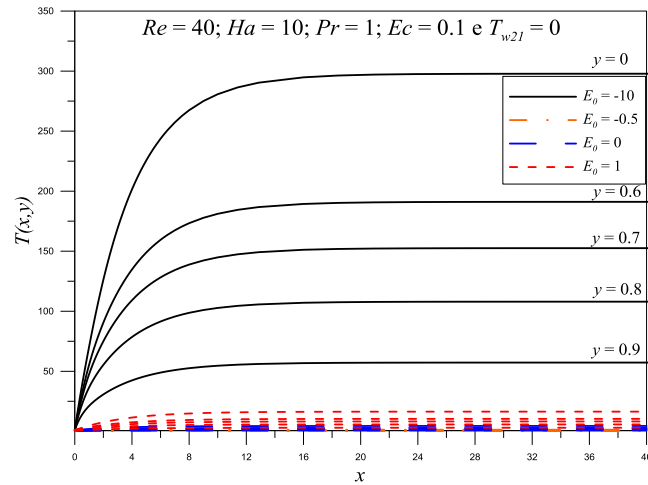


Figura 5.33 Influência do parâmetro elétrico no campo de temperatura - CASO II ($E_0 = -10$), CASO III – ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).

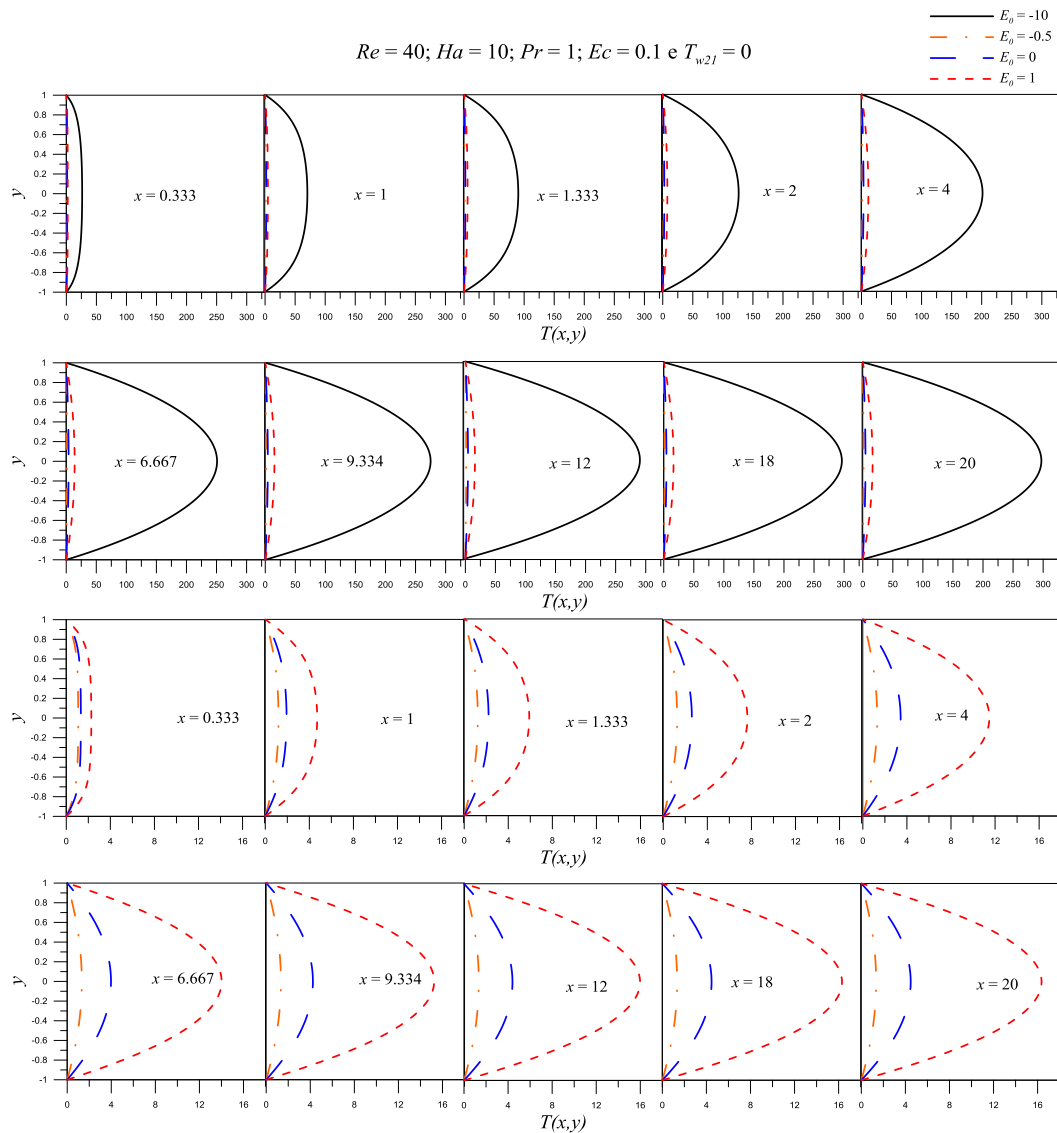


Figura 5.34 Influência do parâmetro elétrico no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO II – ($E_0 = -10$), CASO III – ($E_0 = -0,5$), CASO XI ($E_0 = 0,0$) e CASO XII ($E_0 = 1$).

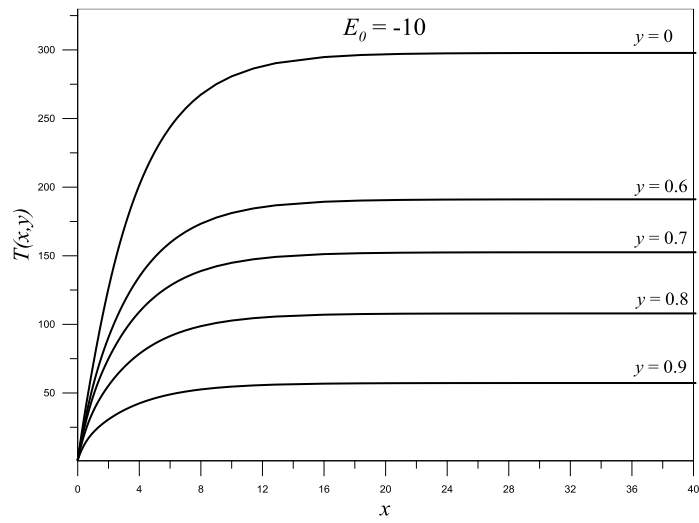


Figura 5.35 Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

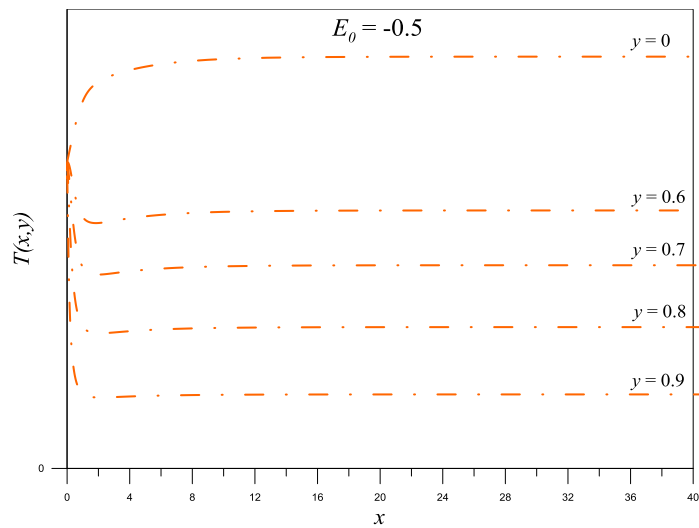


Figura 5.36 Perfil de temperatura para o CASO III ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -0,5$ e $T_{w2l} = 0,0$).

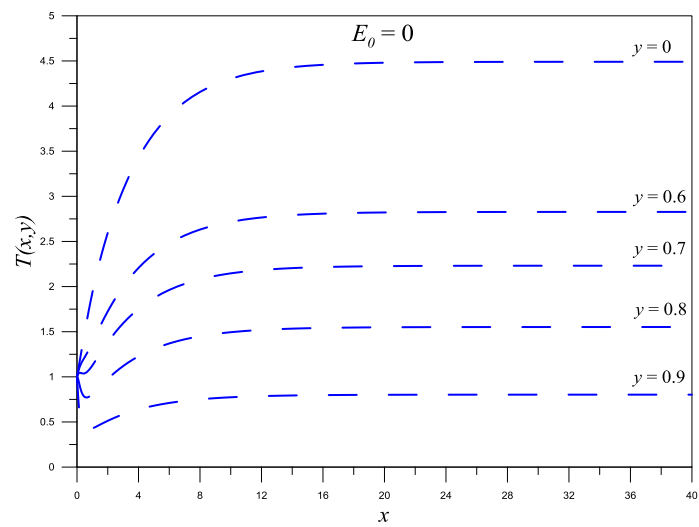


Figura 5.37 Perfil de temperatura para o CASO XI ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 0,0$ e $T_{w2l} = 0,0$).

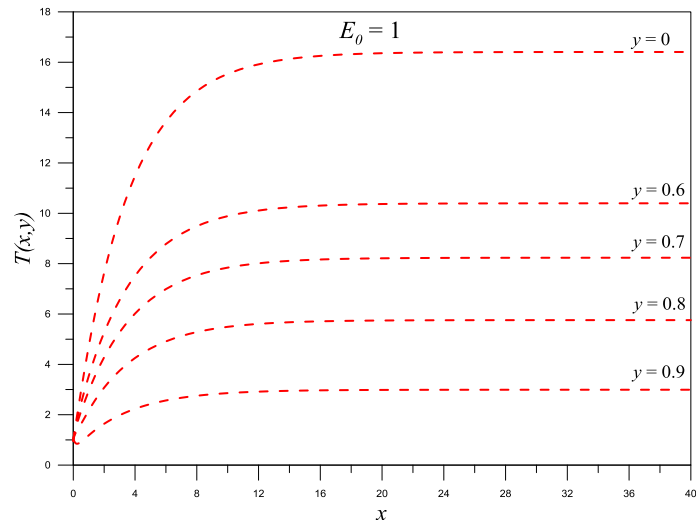


Figura 5.38 Perfil de temperatura para o CASO XII ($Re = 40$; $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = 1$ e $T_{w2l} = 0,0$).

Observando a Fig. (5.36) onde é mostrado o comportamento do perfil de temperatura com a elevação do parâmetro elétrico para os três casos analisados, de modo que para $E_0 = -10$ (maior parâmetro elétrico em módulo – Fig. 5.35), $E_0 = 0$ (sem uma parte da contribuição do aquecimento Joule – Fig. 5.37) e $E_0 = 1$ (Fig. 5.38) o perfil de temperatura se desenvolve longe da entrada do canal ($x = 12$), bem depois do perfil hidrodinâmico que já se apresenta estabelecido próximo de $x = 2$. Esse comportamento indica que estes casos devem ser tratados como problemas de perfil térmico em desenvolvimento, pois o comprimento de entrada térmico tem ordem de grandeza muito maior do que o comprimento de entrada hidrodinâmico.

Para $E_0 = -0.5$ o comportamento do desenvolvimento dos perfis térmico e hidrodinâmico é bem semelhante, sendo que os dois se estabelecem próximo de $x = 2$. Neste sentido, o mesmo pode ser considerado como um problema de desenvolvimento simultâneo, uma vez que o comprimento de entrada térmico tem a mesma ordem de grandeza do comprimento de entrada hidrodinâmico, conforme é visualizado nas Figs. (5.33) e (5.36).

5.3.5 Influência do Número de Prandtl

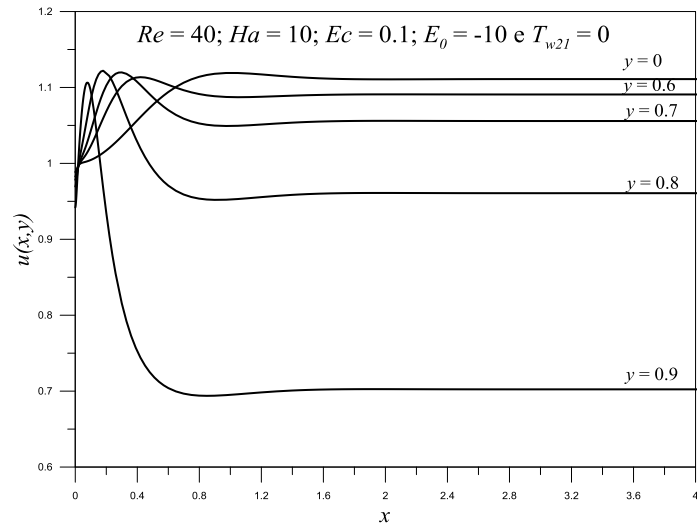


Figura 5.39 Perfil de velocidade para: CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).

5.3.5.1 Campo de temperatura

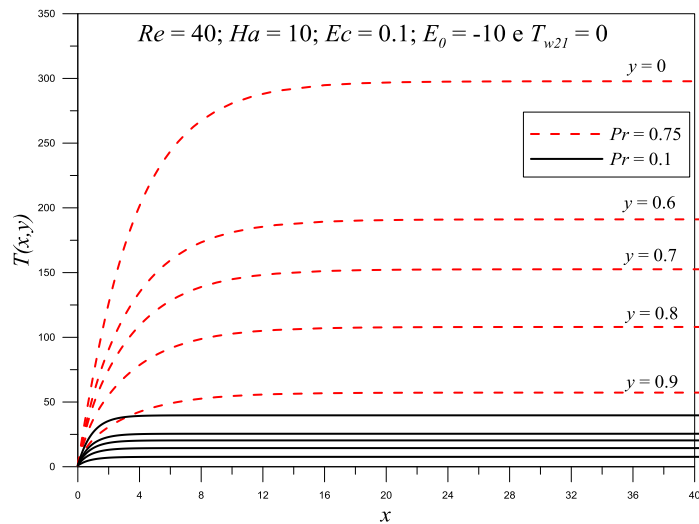


Figura 5.40 Influência do número Prandtl no campo de temperatura - CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).

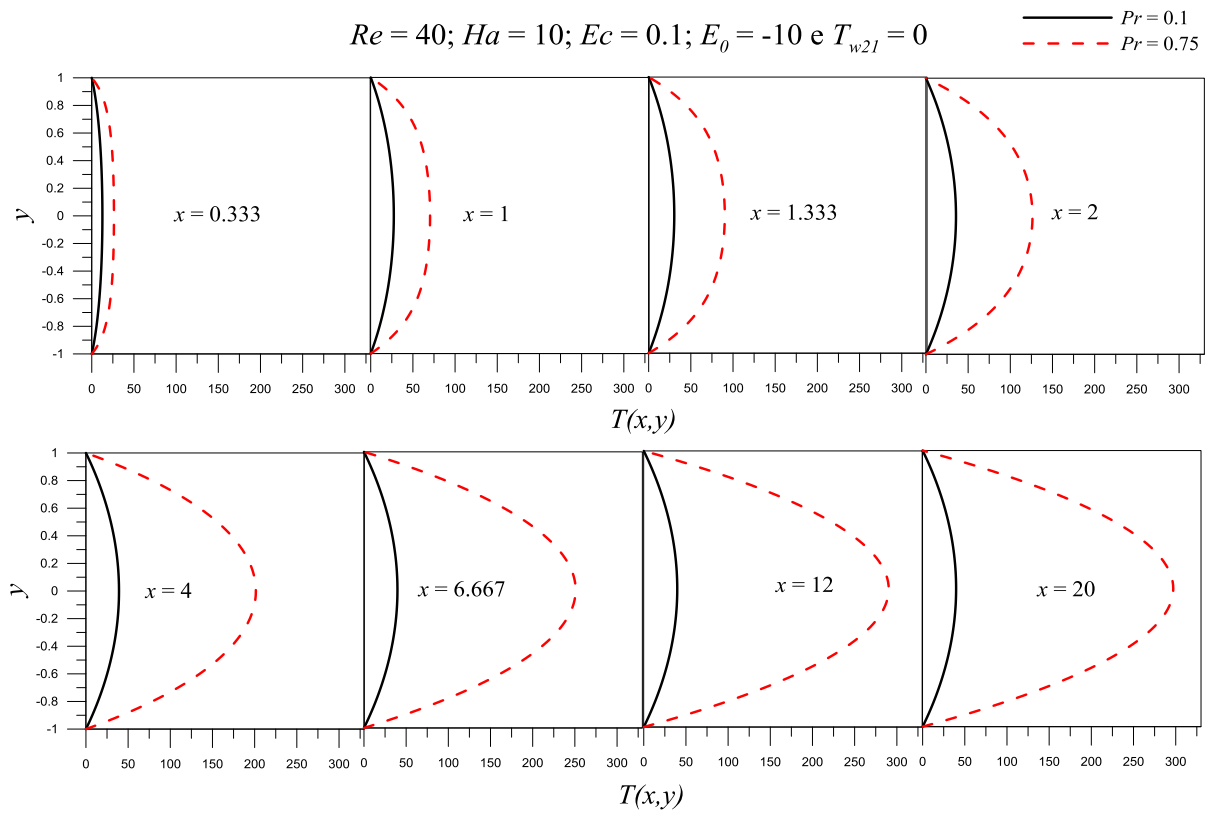


Figura 5.41 Influência do número Prandtl no desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo do canal - CASO VIII ($Pr = 0.1$) e CASO II ($Pr = 0.75$).

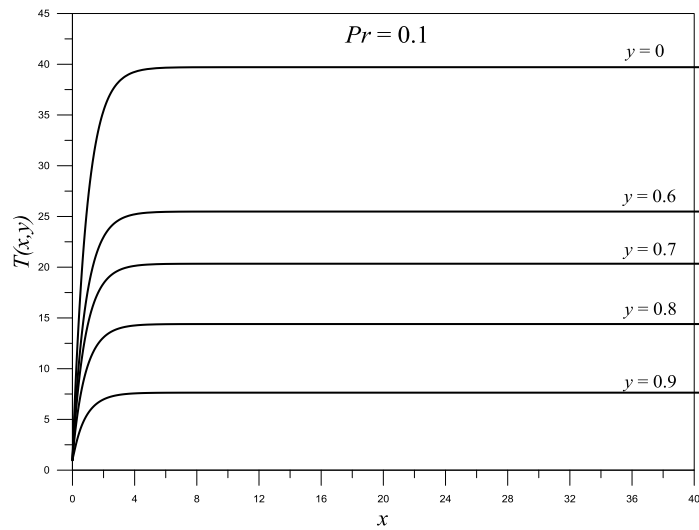


Figura 5.42 Perfil de temperatura para o CASO VIII ($Re = 40; Ha = 10; Pr = 0,1; Ec = 0,1; E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

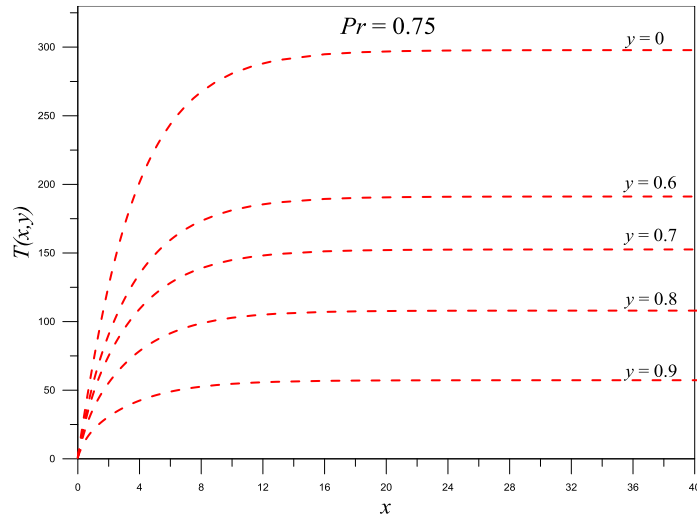


Figura 5.43 Perfil de temperatura para o CASO II ($Re = 40$, $Ha = 10$; $Pr = 0,75$; $Ec = 0,1$; $E_0 = -10$ e $T_{w2l} = 0,0$).

A Fig. (5.40) mostra o comportamento do perfil de temperatura para dois casos com valores distintos de número de Prandtl.

No CASO II que apresenta $Pr = 0.75$ (Fig. 5.43) a difusão de quantidade de calor (α) tem quase a mesma ordem de grandeza da difusão de quantidade de movimento (ν) e desse modo, é observado que o perfil de temperatura se desenvolve mais longe da entrada do canal ($x = 16$), que é maior do que o comprimento de entrada hidrodinâmico que é de $x = 1.6$ (Fig. 5.39) e desse modo, este caso deve ser tratado como um problema de entrada térmica em desenvolvimento, uma vez que a dissipação (μC_p) é determinante, retardando o desenvolvimento do perfil térmico com relação ao perfil de velocidade.

Na Fig. 5.42 do CASO VIII ($Pr = 0.1$) a taxa de difusão viscosa tem ordem de grandeza bem menor do que a taxa de difusão de calor e deste modo, o perfil térmico se estabelece mais próximo da entrada do canal ($x = 4$). Assim, quando é comparado com o campo de velocidade o comprimento de entrada térmica é próximo do comprimento de entrada hidrodinâmico. Esse comportamento ocorre em função de, neste caso, a transferência de calor por condução (k) ser favorecida, o que resulta que o mesmo deve ser tratado como um problema de desenvolvimento simultâneo, uma vez que a transferência de calor por convecção se inicia imediatamente após a entrada de um fluido no duto, e assim, tanto a camada limite hidrodinâmica como a camada limite térmica começam a se desenvolver instantaneamente.

CAPÍTULO VI

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho, foi desenvolvido e analisado o problema do escoamento MHD simultâneo (desenvolvimento hidrodinâmico e térmico) de um fluido condutor elétrico, newtoniano, incompressível, submetido a um campo magnético externo de intensidade constante em um canal de placas planas e paralelas por meio de uma modelagem formulada a partir da equação de Navier-Stokes e da equação de Energia, em que a solução foi obtida através da Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT.

A partir dos resultados apresentados e da análise feita sobre os mesmos foi possível concluir que:

- O procedimento de filtragem aplicado às equações originais foi considerado apropriado no processo de aceleração de convergência, tendo em vista que, as soluções dos campos na região completamente desenvolvida são automaticamente recuperadas pelos mesmos, caracterizando-se assim como uma vantagem adicional associada ao tipo de metodologia empregada;

- As análises de convergência das expansões/séries que representam os campos de velocidade e temperatura e de outros parâmetros correlatos, demonstraram, através de sua natureza híbrida, a eficácia das mesmas para fins de verificação numérica;

- A verificação dos resultados realizada em comparação com aqueles de outros autores (obtidos numericamente ou de forma híbrida) foi considerada satisfatória, de modo que o código computacional desenvolvido pode ser empregado para investigações mais aprofundadas dos casos aqui avaliados e de mais efeitos e condições sobre o escoamento e a transferência de calor no canal;

- A GITT mostrou-se como uma técnica robusta e versátil na solução do problema não-linear proposto, possibilitando assim, a extensão da mesma na solução desta classe de problemas que envolvem fenômenos eletromagnéticos.

- Ressalta-se que a técnica aplicada (GITT) juntamente com o tipo de formulação mais completa (equação de Navier-Stokes), ainda não tinham sido tema de trabalhos prévios, representando uma expansão na aplicação da metodologia, bem como dos resultados, considerados mais genéricos em função de levar em conta os efeitos de entrada, desconsiderados em trabalhos anteriores.

Conclui-se, deste modo, que o objetivo do trabalho foi alcançado de forma satisfatória, uma vez que foi realizada uma análise detalhada com relação ao fenômeno do escoamento MHD em um canal de placas paralelas com transferência de calor.

Como sugestões para trabalhos futuros destacam-se:

- Desenvolver um modelo em que as propriedades físicas e de transporte sejam dependentes da temperatura, de modo a considerar uma gama de aplicações mais genéricas;
- Estender a análise para uma quantidade maior de casos e, deste modo, abranger uma maior variedade de aplicações, possibilitando uma compreensão maior acerca do fenômeno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFVÈN, H. **Discovery of Alfvén Waves**; Nature, Vol. 76, No. 194, 1942.
- BODOIA, J.R. & OSTERLE, J.F. **Finite Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette Flow Developments**. Applied Scientific Research, vol. 10, no 1, pp. 265-276. 1961.
- BRANDT, A. & GILLIS, J. **Magnetohydrodynamic Flow in the Inlet Region of a Straight Channel**, The Physics of Fluids, vol. 9, no 4, pp. 690-699, 1966.
- CHANG, C.C. & LUNDGREN, T.S. **The Flow of an Electrically Conducting Fluid through a Duct with Transverse Magnetic Field**. Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, University of California at Los Angeles, Stanford University Press, 1959.
- CHEN, T.S. & CHEN, G.L. **Magnetohydrodynamic Channel Flow with an Arbitrary Inlet Velocity Profile**. The Physics of Fluids, vol. 15, no 8, pp. 1531-1534, 1972.
- COIMBRA, I. J. C. **Modelo de condução de calor hiperbolico aplicado a espectroscopia de lente térmica**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2015.
- COTTA, R. M. **Benchmark results in computational heat and fluid flow**. International Journal of Heat and Mass Transfer (Invited Paper), v.37, p.381-393, 1994.
- COTTA, R. M. **Computational integral transform approach in nonlinear diffusion and convection-diffusion problems**. Laboratorio di Ingegneria Nucleare di Montcuccolino, Serie Scientifica LIN-1202 (Invited Lecture). Università degli Studi di Bologna, Italy, July, 1992.
- COTTA, R. M. **Hybrid numerical/analytical approach to nonlinear diffusion problems**. Numerical Heat Transfer, Part B. vol. 17, p. 217-226, 1990.
- COTTA, R. M. **Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **The integral Transform Method**. Applied Math. Modeling, v.17, p. 156-161, 1993.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **Unified Integral Transform Method**. Journal Braz. Assoc. Mech. Sciences, RBCM (Invited Paper), v. 12, p. 301-310, 1990.
- COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. **Diffusion Problems with general Time-Dependent coefficients**. Revista Brasileira de Ciências Matemáticas, v.9, n.4, p.269-292, 1987.
- COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. **Laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature**. International Journal of Heat and Mass Transfer, v.29, n.10, p.1495-1501, 1986.
- COTTA, R.M. **The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering**. Beggel House, NY, USA (1998).

- COWLING, T. G., **Magnetohydrodynamics** (New York: Interscience), 1957.
- COWLING, T.G. **Solar Dynamo Theory**; Mon. Not. Roy. Astr. Soc., Vol. 94, No. 39, 1934.
- DAVIDSON, P.A. **An Introduction to Magnetohydrodynamics**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- DAVY, S. H. **Magnetic field deflects arc**. Phil. Trans. Roy. Soc., p. 427, 1821.
- FARADAY, M. **Induced E.M.F.S and currents in moving liquids**. Phil. Trans. Roy. Soc., p. 163 et seq., 1832.
- FERRARO, V.C.A. **Behavior of Magnetic Field in rotating Star**; Mon. Not. Roy. Astr. Soc., Vol. 97, No. 458, 1937.
- FIGUEIRA DA SILVA, **Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Função Corrente e Variáveis Primitivas**, PEM/COPPE/UFRJ, MSc. Tese, Rio de Janeiro, Brasil. 1994.
- GANESH, S. VENKATESH, L. P. **Stratification and MHD Effects on Oscillatory Flow through Parallel Plates**. Applied Mathematical Sciences, Vol. 9, no. 38, 1895 – 1898. 2015.
- GUERRERO, J. S. P., COTTA, R. M. **Integral Transform Solution Of Developing Laminar Duct Flow In Navier-Stokes Formulation**. International Journal for Numerical Methods In Fluids, Vol. 20, 1203-1213. 1995.
- HARTMANN, J. **Flow in Pipes under Transverse Magnetic Field**; Math.-fjs. Medd., Vol. 15, No. 6 and 7, 1937.
- HARTREE, D.R. **A Solution of Laminar Boundary Layer Equation for Retarded Flow**. A.R.C., R. & M., pp. 2426-, 1949.
- HIDE, R. ROBERTS, P. H. **Some Elementary Problems in Magnetohydrodynamics**. Advances in Applied Mechanics. 1962.
- HUGHES, W. F. YOUNG, F. J. **The Electromagnetodynamics of Fluids**. Carnegie Institute of Technology. John Wiley & Sons, Inc., New York. 1966.
- HWANG, C.L. & FAN, L.T. **A Finite Difference Analysis of Laminar Magneto-Hydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Rectangular Duct**. Applied Scientific Research, Section B, vol. 10, no 3-4, pp. 329-343, 1963.
- HWANG, C.L. **A Finite Difference Analysis of Magnetohydrodynamic Flow with Forced Convection Heat Transfer in Entrance Region of a Flat Rectangular Duct**. Ph.D. Thesis, Kansas State University, Manhattan, Kansas, USA, 1962.
- HWANG, C.L.; KNIEPER, P.J. & FAN, L.T. **Heat Transfer to MHD Flow in the Thermal Entrance of a Flat Duct**, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 9, no 8, pp. 773-789, 1966.

HWANG, C.L.; LI, K.C. & FAN, L.T. **Magnetohydrodynamic Channel Entrance Flow with Parabolic Velocity at the Entry**, *The Physics of Fluids*, vol. 9, no 6, pp. 1134-1140, 1966.

IMSL LIBRARY, **Rogue Wave Software, Visual Numerics**. Boulder, Colorado, 2010.

LARMOR, Sir J. **Suggestion of Solar Dynamo**, *Engineering*, 108-461, 1919.

LEDUC, L. **MHD magnetometer**. *J. Phys. Théor. Appl.*, 2° série, n. 6, p. 184, 1887.

LEITE, S. Q. D; ÖZISIK, M. N. **On the solution of linear diffusion problem in media with moving boundaries**. *Nucl. Science and Eng.*, v.76, p.345-350, 1980.

LIMA, J. A. QUARESMA, J. N. N. NEGRÃO, E. N. **Integral transform analysis of MHD flow and heat transfer in parallel-plates channels**. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 34. 420–431. 2007.

LIMA, J. A., SILVA, M. G. K. RÊGO, M. G. O. **Hybrid Solution of the MHD Laminar Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of a Parallel-Plate Channel**. 20th International Congress of Mechanical Engineering. ABCM. Gramado, RS, Brasil. November, 2009.

LIMA, J. A., RÊGO, M. G. O. **On the Integral Transform Solution of low-magnetic MHD Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of a Channel**. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 50. 25–39. 2013.

LOHRASBI, J. **Magnetohydrodynamic Heat Transfer in Two-Phase with Temperature Dependent Properties**. IEEE International Conference on Plasma Science, Cristal City, Virginia, USA. 1987.

LUIKOV, A. V. **Heat and Mass Transfer**. Mir Publishers, Moscow, 1973.

MACHADO, H.A. & COTTA, R.M. **Integral Transform Method, for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluids Flow Problems**. *International Journal for Numerical Methods in Heat and Fluid Flow*, vol. 5, pp 225-237. 1995.

MACIULAITS, A. & LOEFFLER Jr., A.L., **A Theoretical Investigation of MHD Channel Entrance Flows**, *AIAA Journal*, vol. 2, no 12, pp. 2100-2103, 1964.

MACIULAITS, A. & LOEFFLER Jr., A.L., **A Theoretical Investigation of MHD Channel Entrance Flows**, *AIAA Journal*, vol. 2, no 12, pp. 2100-2103. 1964.

MANOHAR, R. **An Exact Analysis of Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Duct**. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik - ZAMM*, vol. 46, no 2, pp. 111-117, 1966.

MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion**. John Wiley, New York, 1984.

MIKHAILOV, M.D. & COTTA, R.M. **Integral Transform Solution of Eigenvalue Problems**. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, no 10, pp. 827-835, 1994.

MIKHAILOV, M.D. & VULCHANOV, N.L. **Computational Procedure for Sturm Liouville Problems**. Journal of Computational Physics, vol. 50, no 3, pp. 323-336, 1983.

MIYAGAWA, H. K. **A técnica da transformação integral generalizada do escoamento em dutos bidimensionais de geometria irregular na forma senoidal**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2014.

MOLOKOV. **Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends**. 2007.

ÖZISIK, M. N. & MURRAY, R. L. **On the solution of linear diffusion problems with variable boundary conditions parameters**. Journal of Heat Transfer. Vol. 96, p. 48-51, 1974.

ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**, John Wiley, New York, 1980.

ÖZISIK, M. N.; **Transferência de calor: Um texto básico**. Editora Guanabara, 1990.

PETERSEN, C. **MHD generator**. U.S. Patent 1443091, 1919.

PIMENTEL, L.C.G. **Simulação do Escoamento Turbulento em dutos via Modelo Algébrico de Turbulência e Transformação Integral**. PEM/COPPE/UFRJ, M.Sc. Dissertação, Rio de Janeiro, Brasil. 1993.

PONTES, P. C. **O uso da técnica da transformada integral generalizada na simulação do processo de transferência de massa em membranas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Faculdade de Engenharia Química, 2013.

RÊGO, M. G. O. **Análise da magnetohidrodinâmica com transferência de calor em canais de placas paralelas via transformação integral**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2010.

RITCHIE, W. **Electromagnetic force propels liquid**. Phil. Trans. Roy. Soc., p. 294, 1832.

ROIDT, M. & CESS, R.D. **An Approximate Analysis of Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Duct**. ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 29, pp. 171-176, 1962.

ROSA, R.J. **Design Consideration for Coal-Fired MHD Generation Ducts**. 5th International Conference on MHD Electrical Power Generation, vol. 1, pp. 427-439, Munich, Germany. 1971.

SALAH, N. B. **A Finite Element Method for the Fully-Coupled Magnetohydrodynamics**. 156f. Tesis (Doctor of Philosophy) – Concordia University. Department of Mechanical Engineering, 1999.

SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. & LIMA, J. A. **Convective Heat Transfer in Ducts: the Integral Transform Approach**, 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical Sciences Series, Rio de Janeiro, Brasil, 2001.

SCHLICHTING, H. **Laminare Kanaleinlaufstromung**. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, band 14, heft 6, pp. 368-373, 1934.

SETAYESHPOUR, A. & SAHAI, V. **Heat Transfer in Variable-Properties MHD Entrance Flow with a Generalized Temperature Boundary Condition**, Proc. 29th Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. pp. 171-187. 1985.

SETAYESH, A. & SAHAI, V. **Heat Transfer in Developing Magnetohydrodynamic Poiseuille Flow and Variable Transport Properties**, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 33, no 8, pp. 1711-1720. 1990.

SHERCLIFF, J.A. **A Textbook of Magnetohydrodynamics**, Pergamon Press, London, UK, 1965.

SHERCLIFF, J.A. **The Flow of Conducting Fluids in Circular Pipes under Transverse Magnetic Fields**. Journal of Fluid Mechanics, vol. 1, no 6, pp. 644-666, 1956.

SHOHET, J.L.; OSTERLE, J.F. & YOUNG, F.J. **Velocity and Temperature Profiles for Laminar Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Plane Channel**, The Physics of Fluids, vol. 5, no 5, pp. 545-549. 1962.

SILVA, J. J. G. **Escoamento Magnetohidrodinâmico transiente em cavidades usando Transformada Integral**. 86f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós Graduação em Engenharia Química, 2011.

SPARROW, E.M.; LIN, S.H. & LUNDGREN, T.S. **Flow Development in the Hydrodynamic Entrance Region of Tubes and Ducts**, The Physics of Fluids, vol. 7, no 3, pp. 338-347, 1964.

SPHAIER, L. A.; COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; QUARESMA, J. N. N. **The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms**. I. C. Heat and Mass Transfer. v. 38, p. 565-571, 2011.

SUTTON, G.W. & SHERMAN, A. **Engineering Magnetohydrodynamics**, Dover Publications, Inc, Mineola, New York, USA, 2006.

TAO, L.N. **Magnetohydrodynamic Effects on the Formation of Couette Flow**, Journal of Aerospace Science, vol. 27, p. 334, 1960.

VENEZUELA, A. L. **Modelagem analítico-numérica do escoamento laminar convectivo em tubos associada à filtração tangencial**. 176f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2008.

WOLFRAM, S. **MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer, in: The Advanced Book Program**. Addison Wesley, Reading, MA, 2005.

ANEXO A

CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO

O campo de função corrente completamente desenvolvido pode ser obtido expandindo a Eq. (2.41) - Equação de Navier-Stokes - para a coordenada x em geometria retangular e simplificando a mesma pelas suposições das apresentadas no início do capítulo, resultando em:

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho} J_3 B_2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

Aplicando-se a Eq. (2.18) - Lei de Ohm - na Eq. (A.1), obtém-se:

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \sigma B_0 (E_3 + u B_0) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Rearranjado e dividindo-se toda a Eq. (A.2) por ν , gera:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - F u = -\frac{1}{\nu \rho} \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\sigma E_3 B_0}{\nu \rho} = C \quad (\text{A.3})$$

Em que:

$$F = \frac{\sigma B_0^2}{\nu \rho} \quad (\text{A.4})$$

Pelo método dos coeficientes a determinar, a EDO (A.3) tem uma solução geral do tipo:

$$u(y) = u_h(y) + u_p(y) \quad (\text{A.5})$$

Em que a solução da parte homogênea (u_h) e a solução da parte particular (u_p) da Eq. (A.5) são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} u_h(y) &= C_1 \cosh(\sqrt{F} y) + C_2 \sinh(\sqrt{F} y) \\ u_p(y) &= A_1 y^2 + A_2 y + A_3; \quad u_p'(y) = 2A_1 y + A_2; \quad u_p''(y) = 2A_1 \end{aligned} \quad (\text{A.6,a-d})$$

Substituindo-se a (A.6,b-d) em (A.3), obtém-se:

$$-FA_1 y^2 - FA_2 y + 2A_1 - FA_3 = C \quad (\text{A.7})$$

De modo que $A_1 = A_2 = 0$ e então, a relação da constante A_3 pode ser encontrada:

$$-FA_3 = C \rightarrow A_3 = -\frac{C}{F} \rightarrow A_3 = -C_0 \quad (\text{A.8})$$

Em que, a constante C_0 é dada por:

$$C_0 = -\frac{C}{F} \quad (\text{A.9})$$

Assim, reescrevendo-se a solução geral da Eq. (A.5), chega-se a:

$$u(y) = C_1 \cosh(\sqrt{F}y) + C_2 \sinh(\sqrt{F}y) - C_0 \quad (\text{A.10})$$

$$u(b) = 0; \quad u(-b) = 0 \quad (\text{A.11.a,b})$$

Aplicando-se as condições de contorno (A.11.a,b) em (A.10), tem-se que as constantes C_1 e C_2 são encontradas:

$$C_1 = \frac{C_0}{\cosh(\sqrt{F}a)}; \quad C_2 = 0 \quad (\text{A.12.a,b})$$

Substituindo-se as constantes (A.12.a,b) em (A.10), obtém-se:

$$u(y) = \frac{C_0}{\cosh(\sqrt{F}a)} \cosh(\sqrt{F}y) - C_0 \quad (\text{A.13})$$

$$u(y) = C_0 \left[-1 + \frac{\cosh(\sqrt{F}y)}{\cosh(\sqrt{F}a)} \right] \rightarrow u(y) = -C_0 \left[1 - \frac{\cosh(\sqrt{F}y)}{\cosh(\sqrt{F}a)} \right]$$

$$u(y) = C^* \left[1 - \frac{\cosh(\sqrt{F}y)}{\cosh(\sqrt{F}a)} \right] \quad (\text{A.14})$$

Em que:

$$C^* = -C_0 \rightarrow C^* = \frac{C}{F} \quad (\text{A.15})$$

Para a determinação de C^* utiliza-se a velocidade média (U), conforme mostra a Eq. (A.16):

$$u_m = \frac{\int_{-c-b}^c \int_{-b}^b u(y) dy dz}{\int_{-c-b}^c \int_{-b}^b dy dz} \quad (\text{A.16})$$

$$U = u_m = \frac{1}{2b} C^* \int_{-b}^b \left[1 - \frac{\cosh(\sqrt{F} y)}{\cosh(\sqrt{F} a)} \right] dy \rightarrow U = \frac{C^*}{2b} \left[y - \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F} y)}{\cosh(\sqrt{F} a)} \right]_{-b}^b$$

$$U = \frac{C^*}{2b} \left\{ 2b - \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)} + \frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right] \right\}$$

$$U = \frac{C^*}{2b} \left\{ 2b - \frac{2}{\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right\} \rightarrow U = \frac{2C^*}{2b} \left\{ b - \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right\} \quad (\text{A.17})$$

Isolando a constante C^* em (A.17), tem-se a Eq. (A.18):

$$C^* = \frac{U}{1 - \frac{1}{b\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)}} \quad (\text{A.18})$$

Usando agora a definição de vazão volumétrica (Q^*), aplica-se a seguinte integral dupla na Eq. (A.14), conforme mostra a Eq. (A.19):

$$Q^* = \int_{-c-b}^c \int_{-b}^b u(y) dy dz \quad (\text{A.19})$$

$$Q^* = 2cC^* \int_{-a}^a \left[1 - \frac{\cosh(\sqrt{F} y)}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right] dy \rightarrow Q^* = 2cC^* \left[y - \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F} y)}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right]_{-b}^b$$

$$Q^* = 2cC^* \left\{ 2b - \frac{1}{\sqrt{F}} \left[\frac{\sinh(\sqrt{F} b)}{\cosh(\sqrt{F} b)} - \frac{\sinh(\sqrt{F}(-b))}{\cosh(\sqrt{F} b)} \right] \right\}$$

$$Q^* = 2c2bC^* \left[1 - \frac{1}{b\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F}b)}{\cosh(\sqrt{F}b)} \right] \quad (\text{A.20})$$

Isolando a constante U/C^* em (A.18), tem-se a Eq. (A.21):

$$1 - \frac{1}{b\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F}b)}{\cosh(\sqrt{F}b)} = \frac{U}{C^*} \quad (\text{A.21})$$

Logo, substituindo-se (A.21) em (A.20), resulta em (A.22):

$$Q^* = 2c2bC^* \frac{U}{C^*} \rightarrow Q^* = 2c2bU \rightarrow U = \frac{Q^*}{2c2b} \quad (\text{A.22})$$

O perfil de velocidade em função da velocidade média (U) é obtido a partir da substituição de (A.18) em (A.14), resultando em (A.23):

$$u(y) = U \frac{1 - \frac{\cosh(\sqrt{F}y)}{\cosh(\sqrt{F}b)}}{1 - \frac{1}{b\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F}b)}{\cosh(\sqrt{F}b)}} \quad (\text{A.23})$$

Fazendo a substituição de (A.22) em (A.23), e dividindo-se toda a equação por U , o perfil de velocidade em função da vazão volumétrica (Q^*) é obtido:

$$\frac{u(y)}{U} = \frac{Q^*}{U2c2b} \frac{1 - \frac{\cosh(\sqrt{F}y)}{\cosh(\sqrt{F}b)}}{1 - \frac{1}{b\sqrt{F}} \frac{\sinh(\sqrt{F}b)}{\cosh(\sqrt{F}b)}} \quad (\text{A.24})$$

Logo, aplicando (A.4), rearranjando-se a equação de modo a obterem-se os grupos adimensionais (3.4,a-d) e considerando a mudança de notação: $u^* = u$ e $y^* = y$, a Eq. (A.24) fica:

$$u(y) = qK [\cosh(Ha) - \cosh(Hay)] \quad (\text{A.25})$$

Em que:

$$K = \left[\cosh(Ha) - \frac{\sinh(Ha)}{Ha} \right]^{-1} \quad (\text{A.26})$$

$$q = \frac{Q^*}{U2c2b} \quad (\text{A.27})$$

Aplicando-se a função corrente definida em (3.7.a) na Eq. (A.25), obtém-se a Eq. (A.28):

$$u(y) = \frac{d\Psi_\infty(y)}{dy} = qK \left[\cosh(Ha) - \cosh(Hay) \right] \quad (\text{A.28})$$

$$\int_{-1}^y d\Psi_\infty(y) dy = \int_{-1}^y qK \left[\cosh(Ha) - \cosh(Ha\alpha) \right] d\alpha$$

$$\Psi_\infty(y) - \Psi_\infty(-1) = qK \left[\alpha \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Ha\alpha)}{Ha} \right]_{-1}^y$$

$$\Psi_\infty(y) = C_1 + qK \frac{1}{K} + qK \left[y \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Hay)}{Ha} \right] \quad (\text{A.29})$$

Chegando ao perfil de velocidade completamente desenvolvido na Eq. (A.30):

$$\Psi_\infty(y) = q + C_1 + qK \left[y \cosh(Ha) - \frac{\sinh(Hay)}{Ha} \right] \quad (\text{A.30})$$

Aplicando-se o limite em que $Ha = 0$, resulta:

$$\Psi_\infty(y) = q + C_1 + qK \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \quad (\text{A.31})$$

Em que $K = \frac{3}{2}$.

ANEXO B
CAMPO DE TEMPERATURA TERMICAMENTE DESENVOLVIDO

O campo de temperatura termicamente desenvolvido pode ser obtido expandindo a Eq. (2.48) – Equação da Energia - para a coordenada x em geometria retangular e simplificando a mesma pelas suposições apresentadas no início do capítulo aplicando as modificações algébricas para obter a equação em termos de variáveis adimensionais, resultando em:

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \frac{4Ec}{Re} \left(\frac{du_\infty}{dy} \right)^2 + \frac{4EcHa^2}{Re} (E_0 + u)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + PrEc \left(\frac{du_\infty}{dy} \right)^2 + PrEcHa^2 (E_0 + u)^2 = 0 \quad (\text{B.1})$$

Derivando-se a Eq. (A.28) em relação a y , obtém-se:

$$\frac{du_\infty}{dy} = -qKHa \sinh(Hay) \quad (\text{B.2})$$

Logo, substituindo-se a Eq. (B.2) em (B.1) e após algum rearranjo, resulta:

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + EcHa^2 Pr \left\{ 2q^2 K^2 \cosh^2(Hay) + \right. \\ \left. - 2qK [E_0 + qK \cosh(Ha)] \cosh(Hay) - q^2 K^2 + [E_0 + qK \cosh(Ha)]^2 \right\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Separando as variáveis e integrando-se duas vezes a Eq. (B.3), tem-se:

$$T_f = C_1 y - EcHa^2 Pr \left\{ \frac{q^2 K^2}{2Ha} \sinh^2(Hay) + \right. \\ \left. - \frac{2qK}{Ha^2} [E_0 + qK \cosh(Ha)] \cosh(Hay) + [E_0 + qK \cosh(Ha)]^2 \frac{y^2}{2} \right\} + C_2 \quad (\text{B.4})$$

$$T_f(-1) = 0; \quad T_f(1) = T_{w21} \quad (\text{B.5.a,b})$$

Aplicando-se as condições de contorno (B.5.a,b) em (B.4), tem-se que as constantes C_1 e C_2 são encontradas:

$$\begin{aligned}
C_1 = \frac{T_{w21}}{2}; \quad C_2 = \frac{T_{w21}}{2} + EcHa^2 Pr \left\{ \frac{q^2 K^2}{2Ha^2} \sinh^2(Ha) + \right. \\
\left. - \frac{2qK}{Ha^2} [E_0 + qK \cosh(Ha)] \cosh(Ha) + \right. \\
\left. + \frac{[E_0 + qK \cosh(Ha)]^2}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{B.6.a,b}$$

Substituindo-se as constantes (B.5.a,b) em (B.4), obtém-se o perfil de temperatura termicamente desenvolvido na Eq. (B.7):

$$\begin{aligned}
T_f(y) = \frac{T_{w21}}{2}(y+1) + EcHa^2 Pr \left\{ \frac{q^2 K^2}{2Ha^2} \sinh^2(Ha) \left[1 - \frac{\sinh^2(Hay)}{\sinh^2(Ha)} \right] + \right. \\
\left. - \frac{2qK}{Ha^2} [E_0 + qK \cosh(Ha)] \cosh(Ha) \left[1 - \frac{\cosh(Hay)}{\cosh(Ha)} \right] \right. \\
\left. + \frac{[E_0 + qK \cosh(Ha)]^2}{2} (1 - y^2) \right\}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Fazendo o limite em que $Ha = 0$, obtém-se:

$$T_f(y) = \frac{T_{w21}}{2}(y+1) + \frac{3EcPrq^2}{4}(1-y^4) \tag{B.8}$$

ANEXO C

PRINCIPAIS PARÂMETROS DE COMPARAÇÃO

Outros parâmetros relacionados aos campos de velocidade e temperatura se fazem necessários para a avaliação e verificação dos resultados. São esses parâmetros o gradiente de velocidade na parede, o qual está associado com o fator de atrito (potência de bombeamento) e a temperatura média de mistura e o gradiente de temperatura na parede, associados ao número de Nusselt local.

a) Fator de Atrito de Fanning (f) – é função da tensão de cisalhamento média nas paredes do canal (gradiente de velocidade médio) e é associado aos requisitos de potência para bombeamento do fluido, sendo definido por:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

E a tensão de cisalhamento na placa superior é dada por:

$$\tau_w = -\mu \left(\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{y=b} \right) = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b}$$

De modo que o fator de atrito fica:

$$f = -\frac{\mu}{\frac{1}{2}\rho U^2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b}$$

Após uma manipulação algébrica, é possível explicitar o Número de Reynolds:

$$f = -8 \frac{1}{Re} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1}$$

E desse modo, o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds fica:

$$fRe = -8 \left(\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right|_{y=1}$$

Empregando-se os grupos adimensionais, a solução particular (filtro) e aplicando a transformação, obtém-se:

$$fRe = 8qKHa \sinh(Ha) + \frac{16}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(x) \right) \quad (C.1)$$

E aplicando-se o limite $Ha = 0$, obtém-se:

$$fRe = 16qK + \frac{16}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 \bar{\Psi}_i(x) \right) \quad (C.2)$$

b) Temperatura Média de Mistura (T_m) – por definição, a temperatura média de mistura é dada por:

$$T_m = \frac{\int_{-w-b}^w \int_{-b}^b uT dy dz}{\int_{-w-b}^w \int_{-b}^b u dy dz}$$

Em que a velocidade média é obtida por meio da equação:

$$U = u_m = \frac{\int_{-w-b}^w \int_{-b}^b u dy dz}{\int_{-w-b}^w \int_{-b}^b dy dz}$$

Assim, fazendo as substituições e alguma álgebra necessárias, resulta:

$$T_m = \frac{1}{U2b} \int_{-b}^b uT dy$$

Aplicando a adimensionalização, o filtro e a transformação integral, a temperatura média fica:

$$T_m = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} M_{ij} \bar{T}_i \bar{\Psi}_j + \sum_{i=1}^{\infty} N_i \bar{T}_i + \sum_{i=1}^{\infty} O_i \bar{\Psi}_i + P \right) \quad (C.3)$$

Onde:

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \tilde{\phi}_j'(y) dy \quad (C.4)$$

$$N_i = \int_{-1}^1 \tilde{\Gamma}_i(y) \frac{d\Psi_\infty(y)}{dy} dy \quad (\text{C.5})$$

$$O_i = \int_{-1}^1 \tilde{\phi}'_i(y) T_f(y) dy \quad (\text{C.6})$$

$$P = \int_{-1}^1 T_f(y) \frac{dT_f(y)}{dy} dy \quad (\text{C.7})$$

c) Número de Nusselt Local (Nu_i) – é função do fluxo de calor nas paredes do canal, sendo definido por:

$$Nu_i = \frac{h_i D_h}{k}$$

- Na parede inferior:

$$Nu_1 = \frac{h_1 D_h}{k}$$

Mas, a partir do balanço de energia na parede, obtém-se:

$$h_1 = \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=-b}}{T_m - T_{w1}}$$

De modo que o Nusselt local na parede inferior na sua forma adimensional, filtrado e transformado fica:

$$Nu_1 = \frac{4}{T_m} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}_i(-1)}{dy} \bar{T}_i(x) + \left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=-1} \right) \quad (\text{C.8})$$

Em que a derivada da solução particular do campo de temperatura aplicado na parede inferior é dada por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=-1} &= \frac{T_{w21}}{2} + EcHaPrq^2 K^2 \sinh(Ha) \cosh(Ha) + \\ &\quad - 2qKEcHaPr [E_0 + qK \cosh(Ha)] \sinh(Ha) + \\ &\quad + EcHa^2 Pr [E_0 + qK \cosh(Ha)]^2 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

E no limite em que $Ha = 0$, a derivada é dada por:

$$\left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=-1} = \frac{T_{w21}}{2} + 3EcPrq^2 \quad (C.10)$$

- Na parede superior:

$$Nu_2 = \frac{h_2 D_h}{k}$$

O balanço de energia na parede resulta que o coeficiente convectivo é:

$$h_2 = - \frac{k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b}}{T_m - T_{w2}}$$

E assim, o Nusselt local na parede superior fica:

$$Nu_2 = \frac{4}{T_m - T_{w21}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}_i(1)}{dy} \bar{T}_i(x) + \left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=1} \right) \quad (C.11)$$

Em que a derivada da solução particular do campo de temperatura aplicado na parede superior é dada por:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=1} &= \frac{T_{w21}}{2} - EcHaPrq^2 K^2 \sinh(Ha) \cosh(Ha) + \\ &+ 2qKEcHaPr [E_0 + qK \cosh(Ha)] \sinh(Ha) + \\ &- EcHa^2 Pr [E_0 + qK \cosh(Ha)]^2 \end{aligned} \quad (C.12)$$

E no limite em que $Ha = 0$, a derivada é dada por:

$$\left. \frac{dT_f}{dy} \right|_{y=1} = \frac{T_{w21}}{2} - 3EcPrq^2 \quad (C.13)$$

Mas, em função das temperaturas entre as duas paredes serem iguais, $T_{w1} = T_{w2}$, para esta aplicação, resulta que a relação entre estas temperaturas (T_{w21}) é igual a 0, de modo que:

$$Nu_1 = Nu_2 \quad (\text{C.14})$$

d) Fator de Atrito Médio e Número de Nusselt Médio (f_m e Nu_m):

$$f_m = \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi \quad (\text{C.15})$$

$$Nu_{m1} = \frac{1}{x} \int_0^x Nu_1(\xi) d\xi \quad (\text{C.16})$$

$$Nu_{m2} = \frac{1}{x} \int_0^x Nu_2(\xi) d\xi \quad (\text{C.17})$$