

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NO
ESCOAMENTO EM DUTOS BIDIMENSIONAIS DE GEOMETRIA IRREGULAR
NA FORMA SENOIDAL**

HELDER KIYOSHI MIYAGAWA

**BELÉM – PA
2014**

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NO
ESCOAMENTO EM DUTOS BIDIMENSIONAIS DE GEOMETRIA IRREGULAR
NA FORMA SENOIDAL**

HELDER KIYOSHI MIYAGAWA

**DISSERTAÇÃO APRESENTADA À
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
QUÍMICA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA
QUÍMICA**

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE PROCESSOS

ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO NAZARENO NONATO QUARESMA – UFPA

**BELÉM – PA
2014**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Miyagawa, Helder Kiyoshi

A técnica da transformada integral generalizada no escoamento em dutos bidimensionais de geometria irregular na forma senoidal / Helder Kiyoshi Miyagawa.- 2014.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma;

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2014

1.Transformadas integrais 2. Navier-Stokes, Equações de 3. Mecânica dos I. Título

CDD 22.ed. 515

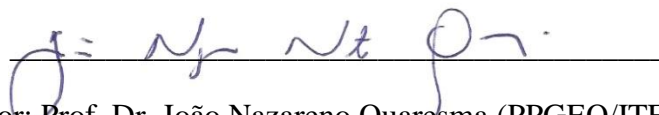
HELDER KIYOSHI MIYAGAWA

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA NO
ESCOAMENTO EM DUTOS BIDIMENSIONAIS DE GEOMETRIA IRREGULAR
NA FORMA SENOIDAL**

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química (PPGEQ) da Universidade Federal do Pará (UFPA) como parte dos requisitos para obtenção do Título de mestre em Engenharia Química.

DATA DA AVALIAÇÃO: 28/02/2014

CONCEITO: _____



Orientador: Prof. Dr. João Nazareno Quaresma (PPGEQ/ITEC/UFPA)



Membro: Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo (PPGEQ/ITEC/UFPA)



Membro: Prof. Dr. Leandro Alcoforado Sphaier (PPGEM / UFF)



Membro: Prof^ª. Dr^ª. Roseane de Lima Silva – UFPA (Campus de Ananindeua/UFPA)

**Belém - PA
2014**

AGRADECIMENTOS

A Deus.

À toda minha família pelo apoio, amor, confiança e disponibilidade em todos os momentos, pela compreensão nos momentos de ausência.

Ao professor João Nazareno Nonato Quaresma pela orientação, amizade e sobretudo pelo apoio e dedicação durante todo o período de desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Emanuel Negrão Macêdo pelo apoio e suas contribuições valiosas no desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Leandro Alcoforado Sphaier por aceitar participar na banca e contribuir na discussão e certamente no enriquecimento deste trabalho.

À professora Roseane de Lima Silva por aceitar participar na banca e contribuir na discussão e certamente no enriquecimento deste trabalho.

Aos colegas do LSP/UFPA pelo apoio e companheirismo durante o período deste trabalho.

Aos colegas de sala e discentes do PPGEQ/UFPA Elenilson Cabral e Fábio Pontes pelo apoio e companheirismo durante o desenvolvimento do referido trabalho.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Recursos Naturais (PRODERNA) pelo apoio durante o período desse trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.

Sumário

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 CONTRIBUIÇÃO DA DISSERTAÇÃO	2
1.4 SÍNTESE DO TRABALHO	3
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....	4
2.1 DUTOS IRREGULARES.....	4
2.2 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	9
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DA SOLUÇÃO ...	11
3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	11
3.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	14
3.2.1 Determinação do filtro	15
3.2.2 Determinação do Problema de Autovalor	18
3.2.3 Par Transformada-Inversa	20
3.2.4 Transformação Integral do Problema.....	21
3.3 ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	24
3.3.1 Cálculo do Jacobiano	26
3.3.2 Condições de contorno	27
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	31
4.1 ANÁLISE DO ESCOAMENTO NO TUDO COM PAREDE ONDULADA	31
4.2 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS.....	36
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	50
ANEXO A	54
ANEXO B	61
ANEXO C	70
ANEXO D	72

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Duto irregular.....	11
Figura 3.2: Condição de contorno na entrada do canal	27
Figura 3.3: Condições de Contorno para o duto truncado com perfil completamente desenvolvido de entrada	27
Figura 4.1: Parâmetros geométricos do canal estudado	31
Figura 4.2: Comparação entre as geometrias do canal para $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ com a razão de comprimento (λ/a)	33
Figura 4.3: Comparação entre as geometrias do canal para $\lambda/a = 8$ com a razão de aspecto (H_{\min}/H_{\max}).....	34
Figura 4.4: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham <i>et al.</i> (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	37
Figura 4.5: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham <i>et al.</i> (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	37
Figura 4.6: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham <i>et al.</i> (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	38
Figura 4.7: Comparação dos perfis de velocidade para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ de acordo com o avanço dos módulos considerando o perfil da velocidade de entrada como totalmente desenvolvido.....	38
Figura 4.8: Comparação dos perfis de velocidade para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ de acordo com o avanço dos módulos considerando o perfil da velocidade de entrada como uniforme.	39
Figura 4.9: Isolinhas da função corrente para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	40
Figura 4.10: Isolinhas da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham <i>et al.</i> (2005).....	40
Figura 4.11: Isolinhas da função corrente para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham <i>et al.</i> (2005).....	41
Figura 4.12: Isolinhas da função corrente para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham <i>et al.</i> (2005).....	41
Figura 4.13: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ e $\lambda/a = 16$	42

Figura 4.14: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 25 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$	42
Figura 4.15: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 100 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$	43
Figura 4.16: Gráficos das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$	43
Figura 4.17: Variação do comportamento no canal de acordo com a variação dos parâmetros geométricos (da esquerda para a direita $\lambda/a = 4, 8$ e 16 e de cima para baixo $H_{\min}/H_{\max} = 0.3, 0.5$ e 0.7).....	44
Figura 4.18: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 25 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$	45
Figura 4.19: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 100 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$	46
Figura 4.20: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$	46
Figura C.1: Escamento totalmente desenvolvido em um canal de placas planas.....	70

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1: Convergência da função corrente para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 4$	34
Tabela 4.2: Convergência da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$, $\lambda/a = 16$	35
Tabela 4.3: Convergência da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	35
Tabela 4.4: Convergência da função corrente para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	35
Tabela 4.5: Convergência da função corrente para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$	36

Resumo

A Técnica da Transformada Integral Generalizada é aplicada na solução das equações de Navier-Stokes para um duto de geometria irregular na forma senoidal em um escoamento incompressível e laminar. Para isso, foi utilizada a formulação em termos de função corrente. Um filtro geral foi adotado que se adapta ao contorno irregular para aumentar a convergência da solução. Foram analisadas diversas geometrias modificando-se a razão de comprimento (λ/a) e a razão de altura (H_{\min}/H_{\max}) para número de Reynolds na faixa de 25 a 400. Para o mesmo número de Reynolds elevando um dos dois parâmetros geométricos a recirculação do escoamento é menor e a diminuição de um dos parâmetros eleva a recirculação do escoamento. A recirculação no caso onde $\lambda/a = 16$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ é pouco acentuada em Reynolds = 400. Considerando a configuração onde $\lambda/a = 4$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ é possível gerar vorticidade em números de Reynolds de baixo valor ($Re = 25$). O fator de atrito, baseado nas forças viscosas, calculado apresentou o mesmo comportamento dos trabalhos da literatura.

PALAVRAS-CHAVE: Técnica da Transformada Integral Generalizada, Navier-Stokes, geometria irregular.

Abstract

The Generalized Integral Transform Technique is applied solve the Navier-Stokes equations for an irregular geometry duct in sinusoidal shape in an incompressible and laminar flow. The formulation was used in terms of current function. A general filter has been adopted that adapts to the irregular contour to increase the convergence of the solution. Different geometries were analyzed by modifying the length ratio (λ/a) and the height ratio (H_{\min}/H_{\max}) for Reynolds number in the range 25-400. For the same Reynolds number rising one of the two geometrical parameters the flow recirculation is lower and the decrease of the parameters increases the flow recirculation. The recirculation for $\lambda/a = 16$ and $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ is low in Reynolds = 400. Considering the configuration where $\lambda/a = 4$ and $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ the flow recirculation is observed at low Reynolds numbers ($Re = 25$). The friction factor, based on the viscous forces, calculated showed the same pattern of the literature.

Keywords: Generalized Integral Transform Technic, Navier-Stokes, irregular geometry.

NOMENCLATURA

a	Amplitude da superfície ondulada
a_{ij}	Coefficiente da equação transformada
A_{ij}	Coefficiente da equação transformada
A_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
B_{ij}	Coefficiente da equação transformada
B_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
c	Parâmetro de contração de escala
c_{ij}	Coefficiente da equação transformada
C_{ij}	Coefficiente da equação transformada
C_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
d_{ij}	Coefficiente da equação transformada
D_{ij}	Coefficiente da equação transformada
D_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
e_{ij}	Coefficiente da equação transformada
E_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
f_{ij}	Coefficiente da equação transformada
F_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
f	Fator de atrito
$F(x,y)$	Filtro aplicado na equação principal
g_{ij}	Coefficiente da equação transformada
G_{ijk}	Coefficiente da equação transformada
h_{ij}	Coefficiente da equação transformada
H	Altura média entre as paredes do canal
H_{ij}	Coefficiente da equação transformada
H_{\min}	Altura mínima do canal
H_{\max}	Altura máxima do canal
i_i	Coefficiente da equação transformada
I_i	Coefficiente da equação transformada
I_{ij}	Coefficiente da equação transformada
i	Índice de termos na série
j	Índice de termos na série
j_i	Coefficiente da equação transformada

J_{ij}	Coeficiente da equação transformada
k	Índice de termos na série
k_1, k_2	Valores da função corrente nas paredes do duto irregular
K_{ijk}	Coeficiente da equação transformada
L_i	Coeficiente da equação transformada
L_{ij}	Coeficiente da equação transformada
M_i	Coeficiente da equação transformada
n	Vetor normal à parede do canal
N_i	Coeficiente da equação transformada
N_i	Norma
NTV	Número de termos das expansões dos potenciais de velocidade e função corrente
NV_i	Norma para o campo de velocidade
O_{ij}	Coeficiente da equação transformada
p	Campo de pressão, adimensional
p^*	Campo de pressão, dimensional
Q	Vazão volumétrica
Re	Número de Reynolds baseado no diâmetro na altura média entre as paredes do canal
u^*, u	Componente do vetor velocidade na direção x , dimensional e adimensional, respectivamente
u_0	Velocidade na entrada do canal
u_F	Filtro utilizado para a velocidade
u_m	Velocidade média
\bar{u}_i	Potencial transformado do campo de velocidade
v^*, v	Componente do vetor velocidade na direção x , dimensional e adimensional, respectivamente
x^*, x	Coordenadas axiais, dimensional e adimensional, respectivamente
x_{out}	Valor da coordenada axial na saída do canal, dimensional
y^*, y	Coordenadas longitudinais, dimensional e adimensional, respectivamente
y_1^*, y_2^*	Funções que definem o contorno irregular, dimensional
y_1, y_2	Funções que definem o contorno irregular, adimensional
Y_i	Autofunção dos campos de velocidade e função corrente
\tilde{Y}_i	Autofunção normalizada

Letras Gregas

α	Amplitude da superfície ondulada
β_i	Autovalores do problema térmico
ξ	Variável de transformação de domínio dos coeficientes da transformada
η	Variável de transformação de domínio da transformada
λ	Comprimento de onda
μ_i	Autovalores do problema de quantidade de movimento
τ	Tensão na parede do canal
ϕ	Potencial de função corrente
$\bar{\phi}_i$	Transformada integral
ψ	Função corrente
ω	Vorticidade

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta as motivações e objetivos que levaram ao estudo do escoamento laminar em canais de paredes irregulares de fluidos newtonianos com a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) nas equações de Navier-Stokes associadas ao problema físico discutido.

1.1 MOTIVAÇÃO

A modelagem matemática para solução de problemas de escoamento de fluidos baseia-se nas equações de Navier-Stokes. O escoamento de fluidos pode ser encontrado em várias aplicações relacionadas à indústria em geral. Dentre elas, envolvendo principalmente fluidos newtonianos incluem o escoamento de líquidos em plantas de processamento químico, recirculação de água em torres de resfriamento, escoamento de ar no condicionamento e ventilação de salas e resfriamento de equipamentos eletrônicos.

Segundo Kundu (2001), para a maioria das geometrias encontradas em trocadores de calor de escoamento transversal, a taxa de transferência de calor por unidade de área pode ser aumentada pelo aumento da velocidade de escoamento e esta taxa varia proporcionalmente com a velocidade. A perda de energia por fricção também é aumentada com a velocidade do escoamento, mas neste caso, a energia varia proporcionalmente com o cubo da velocidade. O projeto otimizado deve então levar em conta esse comportamento que permite combinar as especificações tanto da taxa de transferência de calor e do fator de atrito. A modelagem matemática envolvida no processo de solução do problema abordado no projeto de tais processos é baseada nas equações de Navier-Stokes e da energia.

Devido à complexidade das equações de Navier-Stokes por seu caráter fortemente não linear e acoplado a mesma só permite soluções analíticas ao assumirem-se hipóteses simplificadas ou ao se considerar casos limites para o número de Reynolds em condições muito específicas. Essas hipóteses impedem a reprodução fiel da realidade, mas são suficientemente aproximadas para número de Reynolds elevados e em pontos distantes da entrada.

Ao longo dos anos sessenta e setenta métodos numéricos foram desenvolvidos para a solução das equações completas de Navier-Stokes em paralelo com a evolução dos

computadores de alta velocidade. Dentre esses métodos destacam-se os de diferenças finitas (e suas variantes) (STONE & VANKA, 1996; NICENO & NOBILE, 2001; HAITHAM, *et al.*, 2005), elementos finitos (PARVIN & HOSSAIN, 2012) e volumes finitos (WANG & VANKA, 1996; MAHMUD *et al.*, 2002; RAMGADIA *et al.*, 2012), este último empregado principalmente na Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma técnica de solução analítico-numérica que ao longo das últimas décadas é aplicada em vários problemas convectivos-difusivos de transferência de massa, calor e quantidade de movimento. Em escoamentos bidimensionais essa técnica, atualmente, é bem dominada tanto para modelos de camada limite (MACHADO & COTTA, 1995; FIGUEIRA da SILVA *et al.*, 1996) como para equação de Navie-Stokes (PEREZ GUERREIRO & COTTA, 1995; SILVA, 2003) formuladas tanto em sua forma mais usual de variáveis primitivas quanto a partir da formulação em termo de função corrente.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi estendida para solução de escoamentos laminares em alguns dutos de geometrias irregulares seja em expansão gradual (PEREZ GUERREIRO, 1996; PEREZ GUERREIRO *et al.*, 1995), seja em geometria senoidal (SILVA, 2003). Recentemente somente um artigo foi publicado nessa área (CASTELLÕES *et al.*, 2010), assim, a principal motivação deste presente trabalho é o intuito de se ampliar a ideia da solução híbrida de problemas com paredes de geometria irregulares descritas por uma função qualquer e retomar a aplicação da GITT na solução dos mesmos.

1.2 OBJETIVOS

Na presente dissertação objetiva-se corroborar e ampliar a metodologia de solução empregada no trabalho de Silva (2003) para solução de problemas de escoamento em canais com paredes de geometria irregular empregando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para solução das equações da Navier-Stokes.

1.3 CONTRIBUIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A aplicação de uma função qualquer como condição de contorno em problemas de escoamento em canais com paredes irregulares facilita o estudo da escolha da melhor geometria para os problemas já apontados como exemplos no item 1.1 desse capítulo. Assim, pode-se descrever a parede de um canal em termos de uma função de posição longitudinal e

aplicar-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para descrição do escoamento ao longo do canal.

Além disso, o presente trabalho estuda as condições de escoamento modificando o duto em variáveis geométricas que não foram estudadas nos trabalhos precedentes como a amplitude da entrada do escoamento e o comprimento de onda da função que rege as condições de contorno.

1.4 SÍNTESE DO TRABALHO

O capítulo introdutório procura situar motivações e objetivos do presente trabalho mostrando sua diferença em relação aos outros que inspiraram o desenvolvimento da mesma. O Capítulo II é dedicado à revisão das principais literaturas sobre a solução das equações de Navier-Stokes relacionada a escoamentos em canais com geometria irregular e suas soluções numéricas e híbridas. Também é abordada uma breve revisão da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT).

O Capítulo III é devotado à descrição do problema abordado nesse trabalho assim como sua modelagem matemática, metodologia de solução e descrição do algoritmo computacional utilizado na solução do problema. O Capítulo IV apresenta e discute os principais resultados do presente trabalho e o Capítulo V mostra as principais conclusões do presente trabalho bem como algumas sugestões para o prosseguimento do mesmo em etapas futuras.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 DUTOS IRREGULARES

A dinâmica de fluidos é o fenômeno térmico que ocorrem em um canal de parede irregular têm sido estudados em diferentes áreas da ciência (SILVA, 2003). As superfícies de geometrias de paredes onduladas são, por exemplo, utilizadas em trocadores de calor compactos (KAYS *et al.*, 1984) onde a ondulação na geometria das paredes permite maior eficiência na transferência de calor na superfície entre os dissipadores e o fluido resfriador com o mesmo volume e peso do dissipador. Nas aplicações de transferência de calor gás-líquido e gás-gás, baixas velocidades em conjunto com as baixas condutividades térmicas dos gases (ou alta resistência térmica) requerem relativamente grande área de superfície (ou um grande trocador de calor). O uso de trocadores de calor compactos fornece um método atraente e viável de produção de trocadores de calor menores com melhores características termo hidráulicas, reduzindo, assim, os custos de materiais (JALURIA, 2008). Trocadores de calor compactos são caracterizados por superfícies onduladas com grande densidade de área de superfície.

O estudo de transferência de calor através de uma superfície irregular é também de interesse para aplicações na indústria eletrônica (BAR-COHEN *et al.*, 1990). Para a medicina esse estudo pode ser empregado em dispositivos médicos como um equipamento de diálise ou um oxigenador de membrana, o escoamento através dos canais pode ser considerado laminar devido ao baixo número de Reynolds em um canal estreito de viscosidade elevada (NISHIMURA *et al.*, 1990).

Os fenômenos térmicos que ocorrem em canais de paredes irregulares, principalmente onduladas, bem como estudos experimentais e teóricos são encontrados na literatura da dinâmica de fluidos, como em Goldstein & Sparrow (1977), Xiao *et al.* (1989), Asako & Faghri (1988) e Sunden & Trollheden (1989). Várias características são observadas sob diferentes condições. Na maioria dos casos a parede ondulada melhora a transferência de calor mesmo sem gerar turbulência em condições com número de Reynolds baixos. Para números de Reynolds elevados a velocidade é suficientemente alta para gerar o fenômeno de turbulência que pode acentuar o coeficiente de convecção local. Assim, os fatores mais

contundentes para o estudo tanto do escoamento em questão como da transferência de calor no mesmo são a geometria da parede, as propriedades do fluido e a natureza do escoamento.

Além disso, a geometria irregular em dutos pode ser utilizada em outras áreas onde a transferência de calor não é o fator mais relevante. Na produção de biodiesel, uma das condições para a reação de transesterificação ocorrer é a agitação vigorosa do meio, a aplicação da geometria ondula em microcanais pode ser então utilizada para gerar maior vorticidade e conseqüentemente agitação do meio reagente mesmo em números de Reynolds baixos.

Os canais escolhidos para o estudo dos fenômenos citados geralmente possuem condições de contorno de geometria relativamente simples e periódicas como funções senoidais (em fase ou não), triangulares, retangulares, trapezoidais ou em formas de arco.

Várias tentativas de soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes foram obtidas utilizando os métodos de diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos. Alguns experimentos também foram conduzidos com a finalidade de estudar o comportamento em canais com geometria irregular.

Kawaguti (1961) foi o primeiro pesquisador a fornecer resultados numéricos para as equações de Navier-Stokes para o problema da concavidade para diferentes razões de aspecto, utilizando o método de diferenças finitas. Porém a sua solução convergia somente para número de Reynolds até 64.

Nishimura *et al.* (1990) estudaram experimentalmente a transferência de massa em canais com paredes senoidais em regime estacionário em números de Reynolds moderados e concluíram que para números de Reynolds baixos o escoamento pode ser considerado bidimensional, porém para o canal com paredes em forma de arco um recirculação tridimensional foi observado antes do escoamento se tornar não estacionário.

Wang & Vanka (1995) estudaram numericamente as taxas de transferência de calor para o escoamento através de passagens periódicas de ondas até o número de Reynolds em torno de 180. Observaram que no escoamento em regime estacionário os números de Nusselt médio para o canal de parede ondulada são ligeiramente maiores comparados com os de canais de placas paralelas e que o aumento da transferência de calor na região de transição, se dá com o aumento do fator de atrito.

Stone & Vanka (1999) estudaram o escoamento em desenvolvimento e a transferência de calor utilizando um esquema numérico na solução do escoamento bidimensional não estacionário e equações de energia em passagens onduladas, onde apresentaram cálculos para

um canal constituído de 14 comprimentos de onda. As simulações dependentes do tempo foram realizadas para vários números de Reynolds. Para baixos números de Reynolds, o escoamento é estacionário em todo canal, e com o aumento progressivo do número de Reynolds o escoamento torna-se não estacionário. Os resultados mostraram que ocorre uma mistura do fluido no centro da parede do canal, desse modo observa-se que há um aumento na taxa de transferência de calor e que com o aumento do número de Reynolds o escoamento torna-se não estacionário em qualquer posição espacial.

Rush *et al.* (1999) estudaram experimentalmente a transferência de calor nas regiões laminar e de transição em um canal de passagens sinuosas. As paredes do canal apresentam de 12 a 14 comprimentos de onda variando-se a amplitude da onda, ângulo de fase e os espaços entre as paredes. Observaram-se instabilidades próximas à saída do canal para altos números de Reynolds.

Kundu (2001) estudou numericamente a convecção forçada em regime laminar em dutos bi e tridimensionais de geometria senoidal. O autor aplicou a técnica de Volumes Finitos para solução do problema e observou o aparecimento no canal tridimensional de recirculação longitudinal e transversal ao escoamento ajudando na mistura do fluido e consequentemente promovendo a transferência de calor.

Ničeno & Nobile (2001) analisaram o escoamento e a transferência de calor em duas geometrias de canais com paredes onduladas. As duas geometrias consideradas foram uma senoidal (para $Re = 175-200$) e outra em forma de arco (para $Re = 60-80$). Ambas as geometrias exibiram um aumento significativo na taxa de transferência de calor em até três vezes maior para o maior número de Reynolds. Esse aumento é maior para o canal em forma de arco, mas é acompanhado pelo aumento do fator de atrito.

Wang & Chen (2002) analisaram as taxas de transferência de calor para um escoamento através de um canal curvo com sinuosidades, usando o método simples de transformação de coordenadas e o método de diferenças finitas de direções alternadas. Os resultados mostraram a amplitude do número de Nusselt e o aumento do coeficiente de atrito com o aumento do número de Reynolds e a razão de amplitude do comprimento de onda.

Haitham *et al.* (2005) analisou a transferência de calor e quantidade de movimento em canais com formas senoidal e em forma de arco utilizando o método de diferenças finitas denominado SIMPLE (semi-implicit method for pressure-linked equations). Em ambos os casos o estudo mostrou que a recirculação aumentou com o aumento do número de Reynolds, enquanto que o aumento das propriedades geométricas resultou em diminuição da

recirculação. Além disso, em número de Reynolds elevados, os autores notaram que as isotermas penetraram mais em relação à superfície, o que indica um aumento na taxa de transferência de calor.

Xie *et al.* (2007) estudaram numericamente a transferência de calor e o escoamento em um canal ondulado aplicado em trocadores de calor compacto. Os resultados mostraram que os números de Nusselt e fator de fricção aumentam com o aumento do número de Reynolds. Nos parâmetros geométricos considerados, o fator de fricção e o número de Nusselt global sempre aumentam com o aumento da altura do canal, e com a diminuição do comprimento de onda. O número de Nusselt global aumenta significativamente com o aumento da altura do canal, nesse caso o escoamento pode tornar-se de transição com uma grande penalidade devido ao forte aumento na queda de pressão.

Oviedo-Toledo *et al.* (2008) estudaram experimentalmente o escoamento na entrada de canais sinuosos senoidais com oito comprimentos de onda e observaram que as instabilidades do escoamento são mais evidentes na saída do canal, mas o escoamento na entrada é sempre estacionário. Além disso, foi observado que para uma determinada distância entre as paredes do canal existe um ângulo de fase específico que proporciona maior turbulência.

Sui *et al.* (2010) estudaram o escoamento de um escoamento laminar de água e a transferência de calor em micro canais ondulados. O estudo foi realizado utilizando-se números de Reynolds iguais a 300 e 400 e concluiu que nessas condições a transferência de calor pode ser mantida e níveis elevados ao longo da direção do escoamento onde pode haver um aumento de transferência de calor global significativa sem grandes perdas de pressão em relação aos microcanais com paredes paralelas.

Parvin & Hossain (2012) aplicaram o método de elementos finitos para simular o escoamento e a transferência de calor magnetohidrodinâmica em um canal triangular periódico vertical. Os resultados revelaram que o aumento do número de Reynolds e a diminuição do número de Prandtl aumenta o espaçamento entre as linhas de corrente. Além disso, o aumento simultâneo dos números de Reynolds, Prandtl e Grashof resultam no aumento dos números de Nusselt local e médio.

Ahmed *et al.* (2013) estudou os efeitos de parâmetros geométricos em canais ondulados com geometria trapezoidal no escoamento de nanofluidos. Os resultados numéricos mostram que o aumento médio no número de Nusselt aumentada com o aumento da fracção de volume de nanopartículas, número de Reynolds e amplitude do canal ondulado, mas a

queda de pressão também irá aumentar. Além disso, quando o comprimento de onda do canal aumenta, o número de Nusselt diminui e a queda de pressão aumenta.

Ramgadia & Saha (2013) utilizaram o método de volumes finitos para estudar a escoamento em regimes estacionário e não estacionário em canais ondulados e concluíram que para se obter índice maiores de transferência de calor o escoamento do canal deve ser instável e com alto número de Reynolds. O alto valor de Reynolds pode romper a camada limite térmica perto da parede, eventualmente elevando as taxas de desempenho térmico. O melhor desempenho térmico obtido foi alcançado com o maior número de Reynolds estudado.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) ainda é pouco utilizada para canais bidimensionais com paredes de geometria irregular para solução tanto das equações de Navier-Stokes quanto para solução da equação da energia acoplada.

Perez Guerreiro & Cotta (1992) aplicaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para resolver as equações de Navier-Stokes em uma cavidade utilizando a formulação em linhas de corrente obtendo resultados semelhantes aos comparados com métodos numéricos.

Perez Guerreiro *et al.* (1995) utilizando a formulação em linhas de corrente aplicaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) com a inserção de um filtro afim de melhorar a convergência da parte numérica na solução de escoamentos laminares em canais irregulares em expansão gradual.

Silva (2003) estudou a solução, aplicando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), em dutos bidimensionais de geometria senoidal nas equações de Navier-Stokes por meio da formulação de linhas de corrente para número de Reynolds entre 100 e 500. Uma solução geral para o filtro aplicado na técnica que se adapta ao contorno irregular foi proposto para aumentar a taxa de convergência da expansão em autofunção. No estudo foi observada maior recirculação com a elevação do número de Reynolds e da amplitude do canal. O atrito, representado pelo produto do fator de atrito e número de Reynolds, foi também calculado e comparado com os resultados a partir de métodos discretos disponíveis na literatura para diferentes números de Reynolds e amplitudes do canal obtendo-se resultados semelhantes aos obtidos por Wang & Chen (2002).

Lima *et al.* (2007) aplicaram a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução da equação de Navier-Stokes em escoamentos internos para escoamento turbulento em dutos com paredes paralelas que oferece vantagens na extensão aos escoamento tridimensionais.

Castellões *et al.* (2010) estudou a transferência de calor em um canal com paredes onduladas para baixos números de Reynolds obtendo resultados semelhantes aos Silva *et al.* (2010).

2.2 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A técnica da transformada integral é um enfoque clássico bem conhecido na solução de certas classes de problemas de difusão, lineares e transformáveis (LUIKOV, 1973; ÖZISIK, 1980). Mikahailov & Özisik (1984) compilam uma série de trabalhos que utilizam as ideias da transformação integral na solução exata de problemas em difusão de calor e massa. Ao longo das últimas décadas, após o trabalho pioneiro de Özisik & Murray (1974) esta metodologia de solução foi amplamente estendida para permitir soluções analíticas aproximadas em uma vasta gama de problemas não-transformáveis, como mostrando nos trabalhos de Leite & Özisik (1980), Cotta & Özisik (1986, 1987), Cotta (1992, 1993, 1994) e Cotta & Mikhailov (1990 e 1993). Exemplos de alguns desses problemas são problemas com coeficientes variáveis, coeficientes variáveis nas condições de contorno, problemas que envolvem um problema auxiliar complicado e problemas não lineares.

Assim como o método da transformada integral clássica (também conhecida como método de expansão em autovalores) o método da transformada integral generalizada ganhou um enfoque analítico-numérico pela aplicação de uma etapa numérica após a transformação analítica do problema, oferecendo ao usuário precisão controlada, onde a diferença em relação a outros métodos numéricos está na garantia da convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento nas séries, e um desempenho computacional bastante eficiente para uma grande variedade de problemas, os quais são classificados e sistematicamente apresentados com diversas aplicações (COTTA, 1993), incluindo formulação não-lineares de interesse em aplicação de transferência de calor e escoamento de fluidos.

Este método difere dos métodos numéricos até então utilizados para solução de problemas de caráter fortemente não linear e acoplados, pois não há necessidade de discretização do domínio para geração de malhas. Além disso, para melhorar a precisão do método o esforço computacional exigido é relativamente moderado em comparação com os métodos numéricos tradicionais principalmente quando se eleva a dimensão do problema a ser resolvido. Esses comportamentos são originados devido à natureza híbrida da solução, pois a etapa analítica é aplicada sobre todas menos uma variável independente e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma coordenada.

Outra característica da solução é a aplicação de filtros algébricos oriundos geralmente de versões simplificadas do próprio problema a ser analisado, empregados para acelerar a convergência da solução.

A aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) pode ser resumida nos seguintes passos:

- i. Definição do problema auxiliar, com base, por exemplo, nos termos difusivos da formulação original.
- ii. Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e propriedades de ortogonalidade;
- iii. Desenvolvimento do par transformada-inversa;
- iv. Transformação Integral do problema diferencial parcial em um sistema de equações algébricas ou diferenciais ordinárias acopladas ou ainda outra equação diferencial parcial;
- v. Truncamento do sistema infinito e solução numérica do sistema diferencial resultante para obtenção dos campos transformados;
- vi. Obtenção do potencial original, fazendo-se uso da fórmula de inversão.

A ideia básica na técnica é a não necessidade de encontrar-se uma transformação integral analítica, ou seja, que resulte em um sistema diferencial transformado não acoplado. Assim, pode-se escolher um problema auxiliar (de autovalor) que seja característico do problema original ou não, desenvolver o par transformada-inversa e efetuar a transformação integral chegando-se a um sistema ordinário infinito e acoplado.

Após o truncamento em ordem suficientemente grande para a precisão requerida, automaticamente selecionada durante o próprio processo de solução, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente por algoritmos bem estabelecidos, com controle automático de erro, disponíveis em bibliotecas científicas. A fórmula explícita de inversão fornece então uma representação analítica nas demais variáveis independentes eliminadas pela transformação integral.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DA SOLUÇÃO

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considera-se um canal de paredes definidas por uma geometria arbitrária identificada pelas funções que representam o contorno, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, dentro do qual escoam um fluido newtoniano em regime laminar e permanente. Para maior generalidade do problema pode-se assumir que não existe simetria com relação à linha de centro do duto conforme descrito na Figura 3.1

Além disso, são aplicadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- O escoamento é bidimensional;
- O escoamento é incompressível;
- As propriedades do fluido são constantes;
- As paredes do duto são impermeáveis;
- Considera-se a condição de não deslizamento nas paredes;
- O fluido é newtoniano.

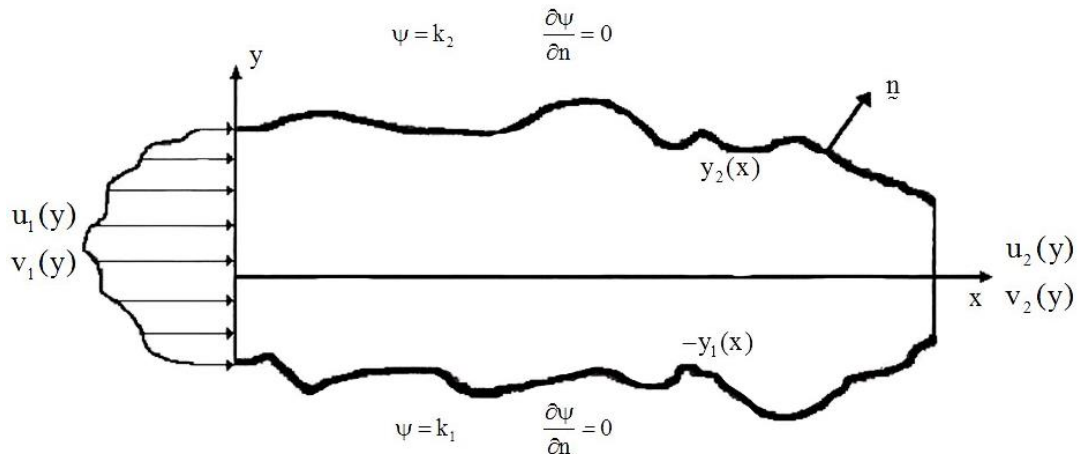


Figura 3.1: Duto irregular (Fonte: Peres Guerreiro, 1995)

O escoamento descrito é governado pelas equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.1.a)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.1.b)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.1.c)$$

Na adimensionalização das equações (3.1.a-c) os seguintes grupos foram empregados para minimizar o número de parâmetros para simplificar o sistema de equações:

$$x = x^* / H; \quad y = y^* / H; \quad y_1(x) = y_1^*(x^*) / H; \quad y_2(x) = y_2^*(x^*) / H; \quad (3.2.a-h)$$

$$u = u^* / u_0; \quad v = v^* / u_0; \quad p = p^* / (\rho u_0^2); \quad Re = H u_0 / \nu$$

onde H representa a altura média do canal sendo calculada pela média simples entre a altura da entrada e a altura máxima do canal.

Na generalidade da formulação proposta é possível assumir-se que as velocidades podem ser pelas componentes, que em termos de função corrente são dados por (WHITE, 2011):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.3. a, b)$$

Derivando a equação (3.1.b) em relação a coordenada y e a equação (3.1.c) em relação a x, com posterior subtração de ambas e levando-se em conta (3.1.a) e as definições de função corrente (equações 3.3.a e 3.3.b), elimina-se o campo de pressões. Assim, aplicando as variáveis adimensionais:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) \quad (3.3.a)$$

ou

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{Re} \nabla^4 \psi \quad (3.3.b)$$

Onde o número de Reynolds (Re) é definido a partir da semidistância entre as paredes e a velocidade média, ambas na entrada do duto. E ∇^4 é o operador biarmônico.

As condições de contorno nas paredes do duto são especificadas ao considerar-se impermeabilidade e não deslizamento, assim:

$$u(x, -y_1(x)) = 0 ; \quad v(x, -y_1(x)) = 0 ; \quad x > 0 \quad (3.5.a,b)$$

$$u(x, y_2(x)) = 0 ; \quad v(x, y_2(x)) = 0 ; \quad x > 0 \quad (3.5.c,d)$$

aplicando a definição de função corrente nas equações (3.5.a-d) nas paredes do duto:

$$\psi(x, -y_1(x)) = k_1 \quad ; \quad \frac{\partial \psi(x, -y_1(x))}{\partial n} = 0 \quad (3.6.a,b)$$

$$\psi(x, y_2(x)) = k_2 \quad ; \quad \frac{\partial \psi(x, y_2(x))}{\partial n} = 0 \quad (3.6.c,d)$$

Onde n , k_1 e k_2 representam o vetor normal à parede do canal e os valores da função corrente nas paredes do duto, respectivamente.

As condições de contorno são completadas ao considerarem-se conhecidas as características hidrodinâmicas tanto na entrada quanto na saída do duto. Sua quantificação será abordada *a posteriori* no subitem 3.3.2.

Os valores da função corrente nas paredes do duto estão relacionados entre si. Assim é possível assumir-se que na entrada do duto o campo de velocidades é dado pelas componentes $u(y)$ e $v(y)$ que em termos de função corrente são dados por:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7.a,b)$$

Integrando-se as equações 3.7.a e 3.7.b:

$$\psi(0, y) = k_1 + \int_{-y_1}^y u(y) dy \quad (3.8.a)$$

$$\psi(0, y) = k_2(y) - \int_{-y_1}^y v(y)dy \quad (3.8.b)$$

Como o interesse é determinar $\psi(0,y)$, a integral da equação (3.8.b) é nula em $x = 0$ e a relação resultante apenas nos informa que a função corrente na entrada depende da coordenada y . Por outro lado, a equação (3.8.a) descreve o valor da função corrente na entrada do duto em função de $u_1(y)$.

A partir de (3.8.a) é possível determinar $\psi(0,y_2)$:

$$\psi(0, y_2) = k_1 + \int_{-y_1}^{y_2} u_1(y)dy \quad (3.9)$$

A integral dada pela equação (3.9) define vazão por unidade de comprimento (Q), na entrada do duto, onde fica evidenciada a dependência entre as constantes k_1 e k_2 :

$$\psi(0, y_2) = k_2 = Q + k_1 \quad (3.10)$$

3.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A metodologia adotada para o problema é a Técnica da Transformada Integral Generalizada. Para facilitar a solução pela mesma, é conveniente definir um filtro que permita homogeneizar as condições de contorno na direção y . Assim, será possível a escolha de um problema de autovalor adequado em tal direção. Assim:

$$\psi(x, y) = \phi(x, y) + F(x, y) \quad (3.11)$$

Onde $\phi(x,y)$ é o potencial desconhecido a ser determinado, e $F(x,y)$ é o filtro, o qual possui os mesmos valores que $\psi(x,y)$, nas paredes do duto. A função $F(x,y)$ não é uma solução particular de $\psi(x,y)$ (PÉREZ GUERREIRO, 1995). Introduzindo-se a equação (3.11) na equação em linha de corrente (3.3.b):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \\
& \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \\
& \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \\
& \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \\
& = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A introdução do filtro nas condições de contorno na direção y e definidas pelas equações (3.6.a-d) leva a:

$$\phi(x, y_1) = k_1 - F(x, -y_1); \quad \frac{\partial \phi(x, -y_1)}{\partial n} = 0 \tag{3.13. a,b}$$

$$\phi(x, y_2) = k_2 - F(x, y_2); \quad \frac{\partial \phi(x, y_2)}{\partial n} = 0 \tag{3.13. c,d}$$

3.2.1 Determinação do filtro

Da mesma forma que a metodologia apresentada por Pérez Guerreiro (1995) e Pérez Guerreiro *et al.* (2000), o filtro $F(x,y)$ deve ser tal que reproduza o valor das funções corrente nas paredes do duto ao longo do seu comprimento. Esta função pode ser construída ao se considerar que em cada posição ao longo do duto se tem um perfil de velocidade desenvolvido, o qual vai se adaptando à irregularidade do canal.

A relação entre o sistema de coordenadas original (x,y) e o sistema transformado (η, x) é dado por:

$$\eta = y - y_3(x), \quad y_0(x) = \frac{1}{2} [y_1(x) + y_2(x)], \quad y_3(x) = \frac{1}{2} [y_2(x) - y_1(x)] \tag{3.14. a,b,c}$$

onde y_3 representa a defasagem entre os eixos y e η . Assim, é possível descrever a função F similar ao campo de função corrente do escoamento completamente desenvolvido (PÉREZ GUERREIRO, 1995) de acordo com o Anexo C como:

$$F(x, \eta) = \frac{3}{4} Q \left[\left(\frac{\eta}{y_0} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{y_0} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \quad (3.15)$$

em termos das coordenadas originais:

$$F(x, y) = \frac{3}{4} Q \left[\left(\frac{y - y_3}{y_0} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{y - y_3}{y_0} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \quad (3.16)$$

Onde Q está relacionada com a vazão volumétrica na seção transversal do duto. A dependência de x do filtro $F(x, y)$ é levada em conta nas funções $y_0(x)$ e $y_3(x)$, as quais definem superfícies planas que passariam pelas paredes do canal. Verifica-se ainda que os valores de $F(x, y)$ nas paredes fornecem:

$$F(x, -y_1) = k_1 \quad \text{e} \quad F(x, y_2) = Q + k_1 \quad (3.17. a.b)$$

onde y pertence ao intervalo $[-y_1(x), y_2(x)]$, e η a $[-y_0(x), y_0(x)]$. Assim, pode-se definir uma nova variável ξ , a qual permitirá determinar mais facilmente os coeficientes da transformação integral:

$$\xi = \frac{\eta}{y_0} = \frac{y - y_3}{y_0} \quad (3.18)$$

Cujo domínio é $\xi \in [-1, 1]$

O filtro $F(x, y)$ é então reescrito como:

$$F(\xi) = \frac{3}{4} Q \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \quad (3.19)$$

As constantes k_1 e k_2 podem ser determinadas assumindo-se que a distância entre as paredes na entrada (para o duto em forma de seno) possui um valor igual a \bar{H}_{\min} , e podemos escrever o campo de velocidades como:

$$U = \frac{u}{U_{av}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{2y}{\bar{H}_{\min}} \right)^3 \right] \quad (3.20)$$

Utilizando-se a definição de vazão $Q = \int_{-y_1}^{y_2} U dy$ e aplicando-se a equação (3.20) na equação (3.10):

$$k_2 = k_1 + \int_{-\frac{\bar{H}_{\min}}{2}}^{\frac{\bar{H}_{\min}}{2}} \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{2y}{\bar{H}_{\min}} \right)^3 \right] dy \quad (3.21.a)$$

$$k_2 = k_1 + \bar{H}_{\min} \quad (3.21.b)$$

Substituindo a equação (3.20) em (3.9):

$$\psi(0, y) = k_1 + \frac{3}{2} \int_{-\frac{\bar{H}_{\min}}{2}}^y \left[1 - \left(\frac{2y}{\bar{H}_{\min}} \right)^3 \right] dy \quad (3.22.a)$$

$$\psi(0, y) = k_1 + \frac{\bar{H}_{\min}}{2} + \frac{3}{2} \left(y - \frac{4}{3} \frac{y^3}{\bar{H}_{\min}} \right) \quad (3.22.b)$$

Como na entrada do duto assume-se que a distância entre as paredes na entrada e na saída do duto é \bar{H}_{\min} :

$$y_1(0) = y_2(0) = \frac{\bar{H}_{\min}}{2} \quad (3.23)$$

$$y_1(x_{out}) = y_2(x_{out}) = \frac{\bar{H}_{\min}}{2} \quad (3.24)$$

No novo sistema de coordenadas

$$y_0(0) = y_0(x_{\text{out}}) = \frac{\bar{H}_{\text{min}}}{2} \quad \text{e} \quad y_3(0) = y_3(x_{\text{out}}) = 0 \quad (3.25. \text{ a,b})$$

Aplicando no filtro:

$$F(x_{\text{out}}, \bar{H}_{\text{min}}/2) = k_2 = \frac{3}{4} Q \left[\left(\frac{y}{\bar{H}_{\text{min}}/2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{\bar{H}_{\text{min}}/2} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \quad (3.26.a)$$

$$k_2 = Q + k_1 \quad (3.26.b)$$

Comparando-se a equação (3.26.b) com a equação (3.21.b)

$$Q = \bar{H}_{\text{min}} \quad (3.27)$$

Pode-se então, determinar valores para as constantes k_1 e k_2 contanto que a equação (3.26.b) seja satisfeita. Assim, faz-se:

$$k_2 = -k_1 = \frac{\bar{H}_{\text{min}}}{2} \quad (3.28)$$

3.2.2 Determinação do Problema de Autovalor

Devido às características homogêneas das condições de contorno na direção y é mais apropriada a escolha do problema auxiliar nessa direção, pois o problema na direção x apresenta condições de contorno não homogêneas.

$$\frac{d^4 Y_i(x, y)}{dy^4} = \mu_i^4 Y_i(x, y), \quad -y_1(x) < y < y_2(x) \quad (3.29)$$

Com condições de contorno:

$$Y_i(x, -y_1) = 0; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial n} = 0 \quad (3.30.a,b)$$

$$Y_i(x, -y_2) = 0; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial n} = 0 \quad (3.30.c,d)$$

O sistema formado pelas equações (3.29) e (3.30.a-d) pode ser reescrito em termos da nova coordenada ξ (Equação 3.18), como:

$$\frac{d^4 Y_i(\xi)}{d\xi^4} = (\mu_i y_0)^4 Y_i(\xi) = \beta_i^4 Y_i(\xi) \quad (3.31.a)$$

$$Y_i(-1) = 0; \quad \frac{\partial Y_i(-1)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.31.b,c)$$

$$Y_i(1) = 0; \quad \frac{\partial Y_i(1)}{\partial \xi} = 0 \quad (3.31.d,e)$$

O problema formado pelas equações (3.31.a-e) pode ser solucionado analiticamente resultando em:

$$Y_i(\xi) = \begin{cases} \frac{\cos(\beta_i \xi)}{\cos(\beta_i)} - \frac{\cosh(\beta_i \xi)}{\cosh(\beta_i)} & , \quad i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sen(\beta_i \xi)}{\sen(\beta_i)} - \frac{\sinh(\beta_i \xi)}{\sinh(\beta_i)} & , \quad i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.32)$$

Onde o autovalor β_i é encontrado a partir de:

$$\beta_i = \mu_i y_0 \quad (3.33)$$

E μ_i pode ser determinado pela equação transcendental:

$$\text{tg}(\mu_i) = \begin{cases} -\text{tgh}(\mu_i) & i = 1, 3, 5, \dots \\ \text{tgh}(\mu_i) & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.34)$$

Nas coordenadas originais a equação 3.32 pode ser reescrita como:

$$Y_i(\xi) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_i(y-y_3)]}{\cos(\mu_i y_0)} - \frac{\cosh[\mu_i(y-y_3)]}{\cosh(\mu_i y_0)} & , \quad i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sin[\mu_i(y-y_3)]}{\sin(\mu_i y_0)} - \frac{\sinh[\mu_i(y-y_3)]}{\sinh(\mu_i y_0)} & , \quad i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.35)$$

A norma é calculada a partir de sua definição:

$$N_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i^2 dy, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

Fazendo-se a transformação de variável em ξ :

$$N_i = y_0 \int_{-1}^1 Y_i^2(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.37)$$

Logo:

$$N_i(x) = 2y_0(x) = N(x) = N \quad (3.38)$$

As autofunções gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j dy = \begin{cases} 0 & , \quad \text{para } i \neq j \\ 2y_0 & , \quad \text{para } i = j \end{cases} \quad (3.39)$$

3.2.3 Par Transformada-Inversa

Representando a função desconhecida $\phi(x,y)$ como uma expansão em torno da autofunção Y_i :

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \bar{\phi}_i(x) \quad (3.40)$$

Operando-se ambos os lados as equação (3.40) com o operador $\int_{-y_1}^{y_2} Y_j dy$:

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_j \phi dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i \bar{\phi}_i(x) \right) dy \quad (3.41)$$

Reordenando o segundo termo da equação (3.41) na qual a integração é na variável y e o domínio de $\bar{\phi}_i$ é em x :

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_j \phi dy = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\phi}_i(x) \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j dy \quad (3.42)$$

Pela propriedade de ortogonalidade o somatório do lado direito da equação (3.42) tem apenas um único termo não nulo, para o caso $i = j$. Obtêm-se desta forma a regra de transformação e o par transformada-inversa:

$$\bar{\phi}_i(x) = \frac{1}{N(x)} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x, y) \phi(x, y) dy, \text{ transformada} \quad (3.43.a)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x, y) \bar{\phi}_i(x), \text{ inversa} \quad (3.43.b)$$

3.2.4 Transformação Integral do Problema

Estabelecido o par transformada-inversa dado pelas equações (3.43.a) e (3.43.b), e definidas as autofunções e a propriedade de ortogonalidade do problema de autovalor escolhido, pode-se então realizar a transformação do problema diferencial original. Para isto, opera-se com $\int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x, y) dy$ ambos os lados da equação (3.12). Após a introdução da fórmula de inversão nos termo não transformáveis, resulta o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas para o cálculo dos potenciais transformados $\bar{\phi}_i$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^{(iv)} = & -\mu_i^4 \bar{\phi}_i + \frac{L_i}{N} + \frac{\text{Re}}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \{ A_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k + B_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k' + C_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k'' + D_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k''' + \\ & E_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k + F_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k' + G_{ijk} \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k'' \} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \{ H_{ij} \bar{\phi}_j + I_{ij} \bar{\phi}_j' + J_{ij} \bar{\phi}_j'' + K_{ij} \bar{\phi}_j''' \} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Onde os coeficientes que dependem de cada posição em x são calculados (mais detalhadamente no Anexo A) a partir de:

$$\begin{aligned} A_{ijk} = & \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy \\ & - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$B_{ijk} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} dy - 2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \quad (3.46)$$

$$C_{ijk} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial Y_k}{\partial x} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \quad (3.47)$$

$$D_{ijk} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} Y_k dy \quad (3.48)$$

$$E_{ijk} = - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \quad (3.49)$$

$$F_{ijk} = -2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \quad (3.50)$$

$$G_{ijk} = - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \quad (3.51)$$

$$H_{ij} = \text{Re } a_{ij} - b_{ij} \quad (3.52)$$

$$I_{ij} = \text{Re } c_{ij} - d_{ij} \quad (3.53)$$

$$J_{ij} = \text{Re } e_{ij} - f_{ij} \quad (3.54)$$

$$K_{ij} = \text{Re } g_{ij} - h_{ij} \quad (3.55)$$

$$L_i = \text{Re } i_i - j_i \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} dy + \\
& - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \frac{\partial F}{\partial x} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial F}{\partial y} dy + \\
& - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \frac{\partial F}{\partial x} dy
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$b_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} dy + 2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2} dy \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
c_{ij} = & \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dy + 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} dy \\
& + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial y} dy - 2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} dy
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$d_{ij} = 4 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} dy + 4 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} dy \tag{3.60}$$

$$e_{ij} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} dy \tag{3.61}$$

$$f_{ij} = 6 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} dy \tag{3.62}$$

$$g_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial F}{\partial y} dy \tag{3.63}$$

$$h_{ij} = 4 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} dy \tag{3.64}$$

$$i_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy \tag{3.65}$$

$$j_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dy \tag{3.66}$$

O cálculo dos coeficientes é um dos principais fatores que elevam o custo computacional em problemas de domínio irregular via GITT. Avaliar diretamente os coeficientes em forma numérica traz a desvantagem que eles podem somente ser calculados dentro do processo de solução do sistema diferencial ordinário. Isto porque os coeficientes são dependentes da posição axial x , o que traria um alto custo computacional e um baixo desempenho do código computacional.

Para contornar esse problema foi utilizada a mesma metodologia empregada em Silva (2003) e Pérez-Guerrero (1995). Para esta abordagem analítica no cálculo dos coeficientes fez-se uso da computação simbólica do software Mathematica[®] (2013). Faz-se uma transformação do domínio utilizando-se a variável ξ (Anexo B) definida pela Equação (3.18) transformando os limites de integração de $[-y_1, y_2]$ para $[-1, 1]$ e através da regra da cadeia é possível estabelecer derivadas em termos de ξ , que aparecem nos coeficientes. Na nova estrutura dos coeficientes surgem integrais independentes da posição axial x , permitindo, portanto, calcular os coeficientes em separado por uma única vez e armazená-los para posteriormente serem multiplicados por funções que levam em conta a dependência do domínio irregular cada vez que o sistema diferencial é resolvido.

3.3 ALGORITMO COMPUTACIONAL

É necessário trucar as séries infinitas em um número de termos suficientemente grande, em um domínio finito, que garanta o erro relativo prefixado para obtenção dos potenciais originais. Portanto, o sistema diferencial ordinário pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{\phi}_i}{dx^4} = & -\mu_i^4 \bar{\phi}_i + \frac{L_i}{N} + \frac{Re}{N} \sum_{i=1}^{NTV} \sum_{j=1}^{NTV} \left\{ \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k A_{ijk} + \bar{\phi}_j \frac{d \bar{\phi}_k}{dx} B_{ijk} + \bar{\phi}_j \frac{d^2 \bar{\phi}_k}{dx^2} C_{ijk} + \right. \\ & \left. + \bar{\phi}_j \frac{d^3 \bar{\phi}_k}{dx^3} D_{ijk} + \frac{d \bar{\phi}_j}{dx} \bar{\phi}_k E_{ijk} + \frac{d \bar{\phi}_j}{dx} \frac{d \bar{\phi}_k}{dx} F_{ijk} + \frac{d \bar{\phi}_j}{dx} \frac{d^2 \bar{\phi}_k}{dx^2} G_{ijk} \right\} \\ & + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{NTV} \left\{ \bar{\phi}_j H_{ij} + \frac{d \bar{\phi}_j}{dx} I_{ij} + \frac{d^2 \bar{\phi}_j}{dx^2} J_{ij} + \frac{d^3 \bar{\phi}_j}{dx^3} K_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde NTV é a ordem de truncamento das séries infinitas

A natureza híbrida da GITT é evidenciada ao resolver-se numericamente o sistema diferencial ordinário não linear. Este sistema possui comportamento *stiff* acentuado, o qual se intensifica à medida que o número de Reynolds aumenta.

O uso de sub-rotinas matemáticas com controle automático de erro global na solução de um problema diferencial ordinário em *softwares* bem estabelecidos é muito conveniente tendo em vista a obtenção de resultados mais acurados. Assim, foi selecionada a subrotina DBVPFD do IMSL (1991) para obtenção dos resultados numéricos.

Para fazer-se uso da mesma é necessário transformar o sistema diferencial ordinário de quarta ordem em um sistema diferencial ordinário de primeira ordem. Para isto define-se:

$$\chi_i = \bar{\phi}_i \quad (3.68)$$

$$\frac{d\chi_i}{dx} = \chi_{NTV+i} = \frac{d\bar{\phi}_i}{dx} \quad (3.69)$$

$$\frac{d\chi_{NTV+i}}{dx} = \chi_{2NTV+i} = \frac{d^2\bar{\phi}_i}{dx^2} \quad (3.70)$$

$$\frac{d\chi_{2NTV+i}}{dx} = \chi_{3NTV+i} = \frac{d^3\bar{\phi}_i}{dx^3} \quad (3.71)$$

$$\frac{d\chi_{3NTV+i}}{dx} = \frac{d^4\bar{\phi}_i}{dx^4} \quad (3.72)$$

Para transformação ao domínio finito $[0,1]$, tal como é conveniente definir-se o seguinte operador:

$$\frac{d(\)}{dx} = \frac{d(\)}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \quad ; \quad \frac{d\eta}{dx} = c(1-\eta) \quad (3.73.a,b)$$

Portanto o sistema pode ser reescrito como:

$$\frac{d\chi_i}{d\eta} = \frac{d\chi_{NTV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \quad (3.74)$$

$$\frac{d\chi_{NTV+i}}{d\eta} = \frac{d\chi_{2NTV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \quad (3.75)$$

$$\frac{d\chi_{2NTV+i}}{d\eta} = \frac{d\chi_{3NTV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \quad (3.76)$$

$$\frac{d\chi_{3NTV+i}}{d\eta} = \frac{\left\{ -\mu_i^4 \chi_i + \frac{L_i}{N} + \frac{\text{Re}}{N} \sum_{i=1}^{NTV} \sum_{j=1}^{NTV} \left\{ \chi_j \chi_k A_{ijk} + \chi_j \chi_{NTV+k} B_{ijk} + \chi_j \chi_{2NTV+k} C_{ijk} + \right. \right.}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.77)$$

$$\left. \left. + \chi_j \chi_{3NTV+k} D_{ijk} + \chi_{NTV+j} \chi_k E_{ijk} + \chi_{NTV+j} \chi_{NTV+k} F_{ijk} + \chi_{NTV+j} \chi_{2NTV+k} G_{ijk} \right\} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{NTV} \left\{ \chi_j H_{ij} + \chi_{NTV+j} I_{ij} + \chi_{2NTV+j} J_{ij} + \chi_{3NTV+j} K_{ij} \right\}}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)}$$

3.3.1 Cálculo do Jacobiano

O jacobiano indica a direção da convergência do sistema e representa as derivadas do mesmo com relação a cada um dos componentes do vetor solução χ . Portanto das equações 3.74-77, obtém-se:

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_i}{d\eta} \right)}{\partial \chi_{NTV+i}} = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{NTV+i}}{d\eta} \right)}{\partial \chi_{2NTV+i}} = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{2NTV+i}}{d\eta} \right)}{\partial \chi_{3NTV+i}} = \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{3NTV+i}}{dx} \right)}{\partial \chi_m} = \frac{-\mu_i^4 \delta_{im} + \frac{\text{Re}}{4} \sum_{k=1}^{NTV} E_{imk} \chi_{NTV+k} + \sum_{j=1}^{NTV} (-\chi_{NTV+j} F_{ijm} + \chi_{3NTV+j} G_{ijm})}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{3NTV+i}}{dx} \right)}{\partial \chi_{NTV+m}} = \frac{\frac{\text{Re}}{4} \left[(B_{im} - C_{im}) + \sum_{i=1}^{NTV} E_{imk} \chi_j + \sum_{k=1}^{NTV} (-\chi_k F_{imk} + \chi_{2NTV+j} G_{imk}) \right]}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{3NTV+i}}{dx} \right)}{\partial \chi_{2NTV+m}} = \frac{-2A_{im} + \frac{\text{Re}}{4} \sum_{j=1}^{NTV} (-\chi_{NTV+j} G_{imk})}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \left(\frac{d\chi_{3NTV+i}}{dx} \right)}{\partial \chi_{3NTV+m}} = \frac{\frac{\text{Re}}{4} \left[D_{im} + \sum_{k=1}^{NTV} \chi_k G_{imk} \right]}{\left(\frac{d\eta}{dx} \right)} \quad (3.84)$$

3.3.2 Condições de contorno

Para solução do sistema diferencial ordinário (3.74-3.77) é necessário a análise das condições de contorno na direção x . Essa análise foi realizada considerando-se o duto truncado.

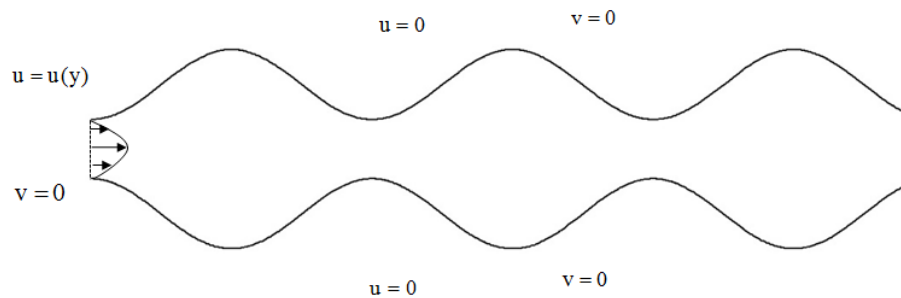


Figura 3.2: Condição de contorno na entrada do canal

Na entrada do canal considera-se que u é prescrito e $v = 0$ (Figura 3.2). Na saída do canal para o duto truncado considera-se que $\partial\omega/\partial x = 0$ e $v = 0$ onde ω é a vorticidade (Figura 3.3).

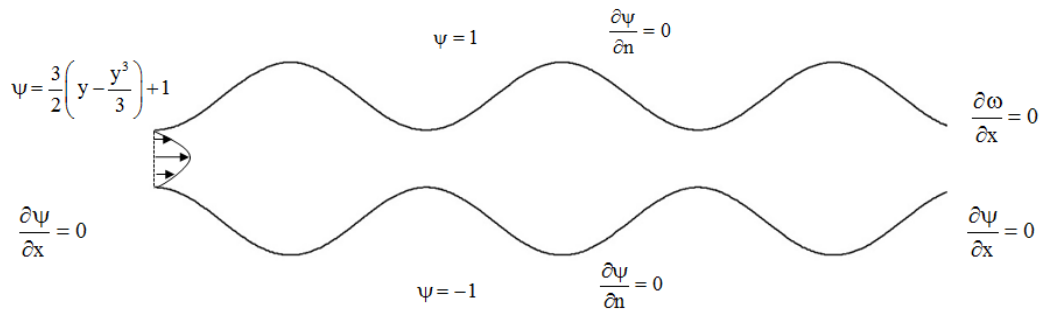


Figura 3.3: Condições de Contorno para o duto truncado com perfil completamente desenvolvido de entrada

Na entrada (0, y)

$$\phi = \psi - F \quad (3.85.a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3.85.b)$$

Na saída (x_{out} , y)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3.86.a)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \quad (3.86.b)$$

onde x_{out} representa o valor da coordenada axial na saída do duto.

Após operar as condições de contorno definidas pelas equações (3.85.a-b) e (3.86.a-b) com $\int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x, y) dy$ as mesmas são transformadas para resultar:

$$\phi_i(0) = 0 \quad , \quad \frac{d\phi_i(0)}{dx} = 0 \quad (3.87.a, b)$$

$$\frac{d\phi_i(x_{out})}{dx} = -\frac{1}{N(x_{out})} \left[M_i + \sum_{j=1}^{NTV} \bar{\phi}_j(x_{out}) N_{ij} \right] \quad (3.88.a)$$

$$\frac{d^3 \phi_i(x_{out})}{dx^3} = -\frac{1}{N(x_{out})} \left\{ O_i + \sum_{j=1}^{NTV} \left[\bar{\phi}_j(x_{out}) P_{ij} + \frac{d\bar{\phi}_j(x_{out})}{dx} Q_{ij} + \frac{d^2 \bar{\phi}_j(x_{out})}{dx^2} R_{ij} \right] \right\} \quad (3.88.b)$$

ou em termos do vetor solução χ :

$$\chi_i(0) = 0 \quad , \quad \chi_{NTV+i}(0) = 0 \quad (3.89.a, b)$$

$$\chi_{NTV+i}(x_{out}) = -\frac{1}{N(x_{out})} \left[M_i + \sum_{j=1}^{NTV} \chi_j(x_{out}) N_{ij} \right] \quad (3.90.a)$$

$$\chi_{3\text{NTV}+i}(x_{\text{out}}) = -\frac{1}{N(x_{\text{out}})} \left\{ \begin{aligned} &O_i + \sum_{j=1}^{\text{NTV}} [\chi_j(x_{\text{out}})P_{ij} + \chi_{\text{NTV}+j}(x_{\text{out}})Q_{ij} + \\ &+ \chi_{2\text{NTV}+j}(x_{\text{out}})R_{ij}] \end{aligned} \right\} \quad (3.90.b)$$

Onde:

$$M_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} dy \quad (3.91)$$

$$N_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} dy \quad (3.92)$$

$$O_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) dy \quad (3.93)$$

$$P_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} \right) dy \quad (3.94)$$

$$Q_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(3 \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} \right) dy \quad (3.95)$$

$$R_{ij} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} dy \quad (3.96)$$

Considerando-se o perfil de velocidade de escoamento uniforme na entrada (0, y):

$$\phi = \psi - F \quad (3.97.a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3.97.b)$$

Após operar as condições (3.97.a) e (3.97.b) com $\int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x, y) dy$ as mesmas são transformadas para resultar:

$$\phi_i(0) = \frac{H_{\min}}{8} \int_{-1}^1 (\xi^3 - \xi) Y_i(\xi) d\xi \quad , \quad \frac{d\phi_i(0)}{dx} = 0 \quad (3.98. a, b)$$

em termos do vetor solução e com a transformação de domínio temos:

$$\chi_i(0) = \frac{H_{\min}}{8} \int_{-1}^1 (\xi^3 - \xi) Y_i(\xi) d\xi \quad , \quad \chi_{\text{NTV}+i}(0) = 0 \quad (3.99. \text{ a, b})$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 ANÁLISE DO ESCOAMENTO NO DUTO COM PAREDE ONDULADA

O duto estudado é mostrado na Figura 4.1.

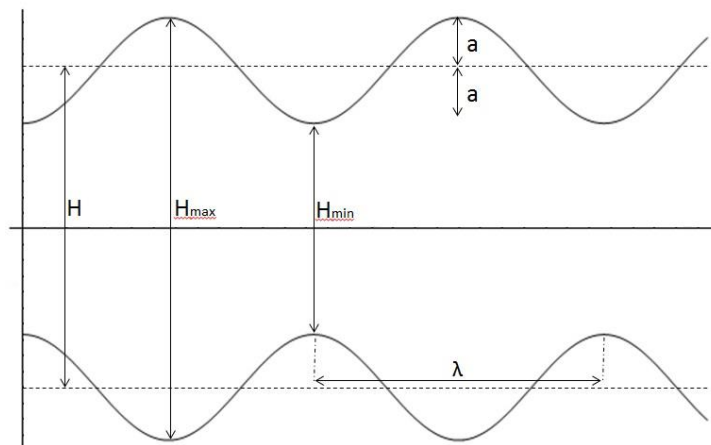


Figura 4.1: Parâmetros geométricos do canal estudado

Os artigos estudados adotam parâmetros adimensionais diferentes para a caracterização da função representativa das paredes do sistema. Haitham *et al.* (2005, 2013), Ramgadia (2012, 2013), e Stalio & Piller (2007) fazem referência a quatro comprimentos específicos para descrever a geometria de uma parede com característica senoidal, a amplitude “ a ”, o comprimento de onda “ λ ” e a distância entre as paredes na entrada do canal “ H_{\min} ” e a distância entre duas cristas “ H_{\max} ” que são representados por dois grupos adimensionais, a razão de altura (H_{mm}) e a razão de comprimento (λ^*):

$$H_{mm} = \frac{H_{\min}}{H_{\max}} \quad (4.1)$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{a} \quad (4.2)$$

Em estudos numéricos Rush *et al.* (1999) e Mahmud *et al.* (2002) e em estudos experimentais Nishimura *et al.* (1990) e Oviedo-Tolentino (2008) utilizaram três parâmetros

dimensionais resultando em dois parâmetros adimensionais afim de caracterizar as dimensões das condições de contorno, a sinuosidade da superfície (a/H) e a razão de aspecto ($\bar{\lambda} = \lambda/H$).

Os parâmetros razão de altura (H_{\min}/H_{\max}) e a razão de comprimento (λ/a) podem ser definidos em função da sinuosidade da superfície (a/H) e da razão de aspecto ($\bar{\lambda}$):

$$\lambda/a = \frac{\bar{\lambda}}{(a/H)} \quad (4.3)$$

$$H_{\min}/H_{\max} = \frac{H-2a}{H+2a} = \frac{1-2a/H}{1+2a/H} \quad (4.4)$$

Assim, as funções que definem a geometria do duto com parede ondulada podem ser determinadas em função dos termos adimensionais a/H e λ/H e podem ser definidas como: de acordo com Ramgadia (2012, 2013):

$$y_1(x) = y_2(x) = \frac{\bar{H}_{\min}}{2} + \frac{2a}{H} \left[\sin^2 \left(\frac{\pi x}{\bar{\lambda}} \right) \right] \quad (4.5)$$

ou de acordo com Mahmud *et al.* (2002):

$$y_1(x) = y_2(x) = \frac{\bar{H}_{\min}}{2} + \frac{a}{H} \left\{ 1 - \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{4x}{\bar{\lambda}} \right) \right] \right\} \quad (4.6)$$

Onde:

$$\bar{H}_{\min} = \frac{H_{\min}}{H} = \frac{H-2a}{H} = 1 - 2 \frac{a}{H} \quad (4.7)$$

e as relações a/H e $\bar{\lambda}$ ainda podem ser determinadas em função do primeiro parâmetro adimensional H_{\min}/H_{\max} e λ/a respectivamente:

$$\frac{a}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - H_{\min}}{1 + H_{\min}} \right) \quad (4.8)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda/a \cdot (a/H) \quad (4.9)$$

Para geometrias distintas é observado que os parâmetros geométricos são mais relevantes para o aparecimento da vorticidade, pois, da maneira formulada, a mudança de qualquer uma das variáveis estudadas implica ou na mudança do comprimento de onda e conseqüentemente no comprimento total do canal, no caso de λ/a (Figura 4.2), ou na mudança conjunta da amplitude e do comprimento de onda do mesmo, no caso de H_{\min}/H_{\max} (Figura 4.3).

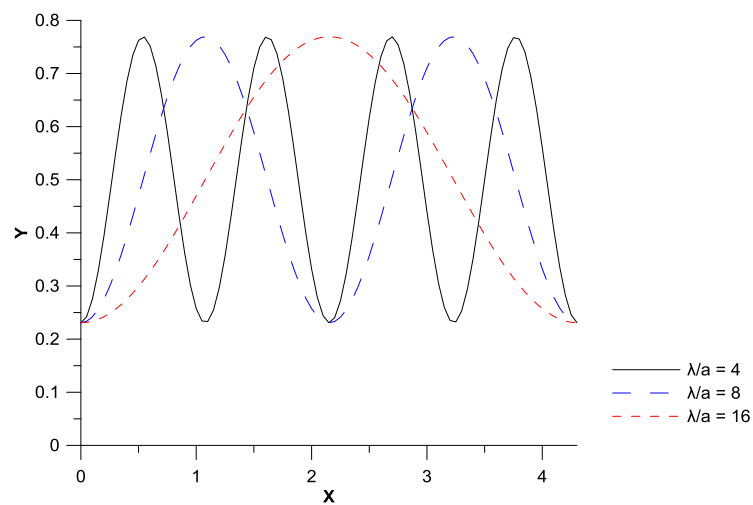


Figura 4.2: Comparação entre as geometrias do canal para $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ com a razão de comprimento (λ/a)

Haitham (2005) explica que o aumento da razão de altura resulta na diminuição do tamanho da recirculação devido a maior área de escoamento. De forma similar, o aumento da razão de comprimento resulta no decréscimo do tamanho da recirculação devido ao aumento da suavidade da função que descreve a parede.

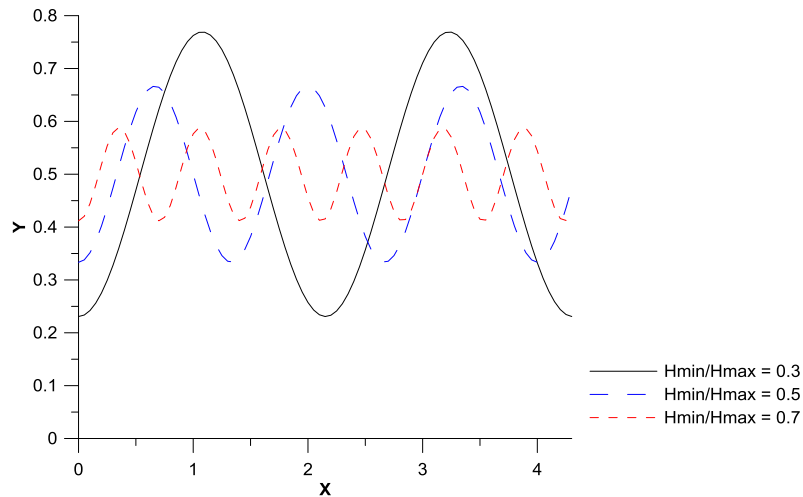


Figura 4.3: Comparação entre as geometrias do canal para $\lambda/a = 8$ com a razão de aspecto (H_{\min}/H_{\max})

As Tabelas 4.1 a 4.5 mostram a convergência da função corrente, considerando o perfil uniforme de entrada, ao longo da linha para $y = H_{\min}/2$ para os dois casos limites $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$ para Reynolds 400 e $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ e $\lambda/a = 16$ para Reynolds 25, e os casos para Reynolds igual a 25, 100 e 400 para o modelo onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$, os quais também foram estudados por Haitham *et al.* (2005).

Tabela 4.1: Convergência da função corrente para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 4$

$n \backslash x$	0	$\lambda/2$	λ	2λ	4λ	6λ	8λ	10λ
5	0.4773	1.0177	0.5498	0.5879	0.5999	0.6008	0.6009	0.5902
10	0.4987	1.0607	0.5624	0.5992	0.6154	0.6186	0.6192	0.6063
15	0.5009	1.0600	0.5636	0.5999	0.6155	0.6185	0.6191	0.6056
20	0.4984	1.0641	0.5641	0.5997	0.6154	0.6184	0.6190	0.6053
25	0.5012	1.0652	0.5642	0.5996	0.6154	0.6184	0.6190	0.6054
30	0.5003	1.0659	0.5642	0.5996	0.6154	0.6184	0.6190	0.6054
35	0.5000	1.0659	0.5642	0.5996	0.6154	0.6184	0.6190	0.6054
40	0.5004	1.0659	0.5642	0.5996	0.6154	0.6184	0.6190	0.6054

Como pode ser notado na Tabela 4.1, de maneira semelhante ao observado no trabalho de Silva (2003) onde a convergência foi mais lenta na saída do canal, no presente trabalho a dificuldade da convergência se encontra na entrada do canal principalmente no primeiro módulo e na posição $x = 0$. A diferença de comportamento provavelmente é proveniente da condição de contorno diferente considerada de perfil de velocidade uniforme na entrada.

A Tabela 4.2, demonstra a convergência dos valores da função corrente para as condições mais suaves consideradas no presente trabalho onde $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$, $\lambda/a = 16$. Pode-se notar que a convergência é rapidamente alcançada para $x > \lambda/2$ sendo necessários

somente 15 termos, porém, mesmo nesse caso mais brando de escoamento, para $x = 0$, a convergência é lenta e só é atingida utilizando-se 40 termos.

Tabela 4.2: Convergência da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$, $\lambda/a = 16$

n \ x	0	$\lambda/2$	λ	2λ	4λ	6λ	8λ	10λ
5	0.4773	0.7296	0.6525	0.6539	0.6539	0.6539	0.6539	0.6420
10	0.4987	0.7326	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
15	0.5009	0.7329	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
20	0.4984	0.7331	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
25	0.5012	0.7331	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
30	0.5003	0.7331	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
35	0.5000	0.7331	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422
40	0.5004	0.7331	0.6529	0.6543	0.6543	0.6543	0.6543	0.6422

Tabela 4.3: Convergência da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

n \ x	0	$\lambda/2$	λ	2λ	4λ	6λ	8λ	10λ
5	0.4773	0.3026	0.6645	0.6645	0.6645	0.6645	0.6645	0.6556
10	0.4987	0.3028	0.6648	0.6648	0.6648	0.6648	0.6648	0.6559
15	0.5009	0.3029	0.6648	0.6648	0.6648	0.6648	0.6648	0.6559
20	0.4984	0.3029	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6559
25	0.5012	0.3029	0.6648	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6559
30	0.5003	0.3029	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6559
35	0.5000	0.3029	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6559
40	0.5004	0.3029	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6647	0.6559

A Tabela 4.3, demonstra a convergência dos valores da função corrente no mesmo caso estudado por Haitham *et. al.* (2005) onde $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. Pode-se notar que a convergência é rapidamente alcançada para $x > \lambda/2$ sendo necessários somente 15 termos. Para $x = 0$, a convergência é lenta e só é atingida utilizando-se 40 termos.

Tabela 4.4: Convergência da função corrente para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

n \ x	0	$\lambda/2$	λ	2λ	4λ	6λ	8λ	10λ
5	0.4773	0.3937	0.6322	0.6332	0.6332	0.6332	0.6332	0.6149
10	0.4987	0.4026	0.6331	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
15	0.5009	0.4033	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
20	0.4984	0.4036	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
25	0.5012	0.4036	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
30	0.5003	0.4036	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
35	0.5000	0.4036	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158
40	0.5004	0.4036	0.6332	0.6342	0.6342	0.6342	0.6342	0.6158

A Tabela 4.4, demonstra a convergência dos valores da função corrente no mesmo caso estudado por Haitham *et. al.* (2005) onde $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. Pode-se notar

que com aumento do número de Reynolds a convergência alcançada para $x > \lambda/2$ quando consideramos 20 termos. Para $x = 0$, a convergência é mais lenta comparando-se com a Tabela 4.3 e só é atingida utilizando-se 40 termos.

Tabela 4.5: Convergência da função corrente para $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

n \ x	0	$\lambda/2$	λ	2λ	4λ	6λ	8λ	10λ
5	0.4773	0.3908	0.5772	0.6009	0.6049	0.6050	0.6050	0.5943
10	0.4987	0.4362	0.5881	0.6098	0.6157	0.6161	0.6161	0.6028
15	0.5009	0.4416	0.5889	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025
20	0.4984	0.4436	0.5891	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025
25	0.5012	0.4440	0.5891	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025
30	0.5003	0.4442	0.5891	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025
35	0.5000	0.4442	0.5891	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025
40	0.5004	0.4442	0.5891	0.6099	0.6156	0.6160	0.6160	0.6025

A Tabela 4.5, demonstra a convergência dos valores da função corrente no mesmo caso estudado por Haitham *et. al.* (2005) onde $Re = 400$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. Pode-se notar que a convergência alcançada para $x > \lambda/2$ com 30 termos. Para $x = 0$, a convergência é lenta e só é atingida utilizando-se 40 termos.

Analisando-se as Tabelas 4.1-5, pode-se notar que a convergência da GITT depende do quanto o escoamento gera recirculação, nos casos onde existe maior recirculação a convergência é mais lenta principalmente nas geometrias onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 4$ para Reynolds igual a 400.

4.2 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

O presente trabalho foi validado comparando-se os resultados dos campos de velocidade obtidos nos trabalhos de Ramgadia & Saha (2012), diferenças finitas, e Haitham *et. al.* (2005), volumes finitos, para Reynolds igual a 25, 100 e 400 para o modelo onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$ e considerando-se somente o perfil uniforme de velocidade na entrada do duto.

O módulo (cada módulo corresponde à área do duto compreendida entre dois vales consecutivos) considerado adequado para essa comparação, como será explicado *a posteriori*, é o quarto módulo e a posição no eixo x é a correspondente ao meio do módulo. Como pode ser observado nas Figuras 4.4, 4.5, 4.6, o método da GITT aproximou-se de ambos os

resultados tendo maior correspondência com os resultados obtidos por Ramgadia & Saha (2012).

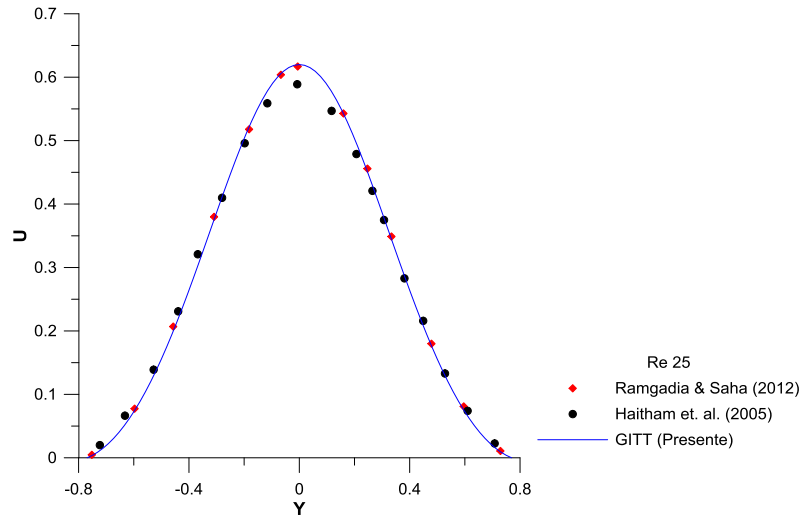


Figura 4.4: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham *et al.* (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 25$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

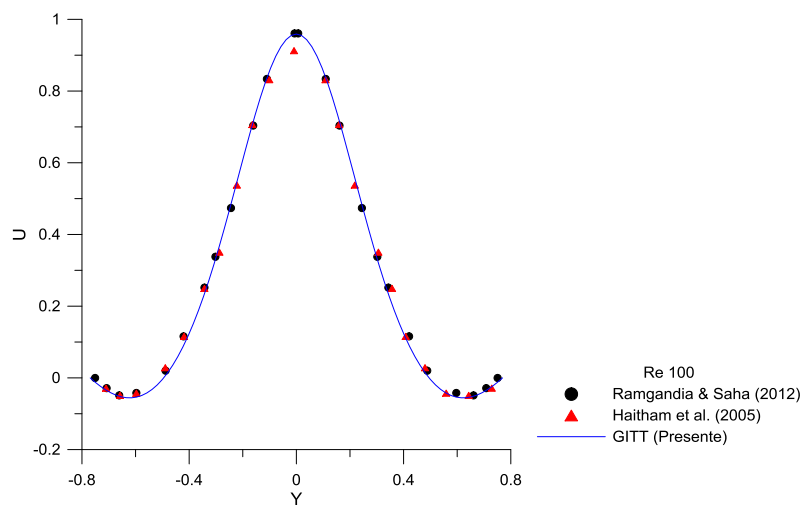


Figura 4.5: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham *et al.* (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 100$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

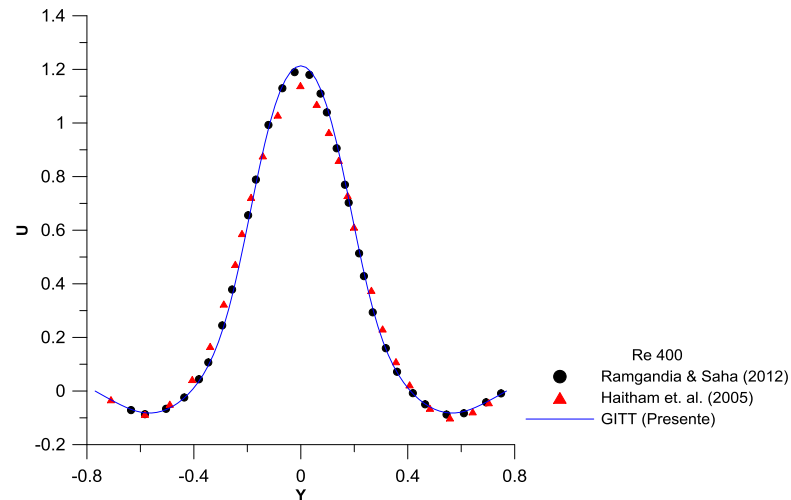


Figura 4.6: Gráfico de comparação do perfil de velocidade com Haitham *et al.* (2005) e Ramgadia & Saha (2012) para $Re = 400$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

Como pode ser observado nas Figuras 4.4, 4.5, 4.6, os resultados obtidos por Haitham *et al.* (2005) subestimam os valores calculados pela GITT e pelo artigo de Ramgadia & Saha (2012).

Inicialmente foi considerada na entrada do canal a condição de perfil de escoamento totalmente desenvolvido em um canal sem sinuosidade. A simulação dos escoamentos segundo os mesmos parâmetros geométricos, ao contrário do relatado por Haitham *et al.* (2005), mostraram variação do campo de velocidade de acordo com o avanço dos módulos, se estabilizando a partir do terceiro módulo como pode ser observado na Figura 4.7 e melhor evidenciado para Reynolds igual a 400.

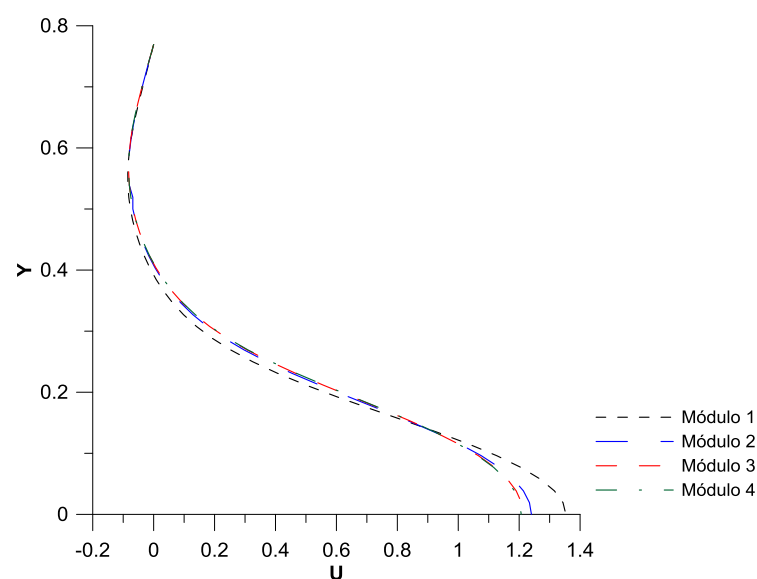


Figura 4.7: Comparação dos perfis de velocidade para $Re = 400$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ de acordo com o avanço dos módulos considerando o perfil da velocidade de entrada como totalmente desenvolvido.

Os resultados concordam o comportamento relatado por Mahmud *et al.* (2002) no qual para a mesma geometria estudada notou-se que o perfil de velocidade dos primeiros dois módulos são distintos dos demais, destacando-se principalmente o primeiro.

Considerando-se a condição na entrada como um perfil uniforme, como nos trabalhos de Haitham *et al.* (2005) e Ramgadia & Saha (2012), pode-se notar, principalmente em números de Reynolds mais elevados como na Figura 4.8, que o perfil de velocidade encontrado no primeiro módulo difere dos demais módulos e nota-se a semelhança entre os perfis de velocidade somente a partir do terceiro módulo.

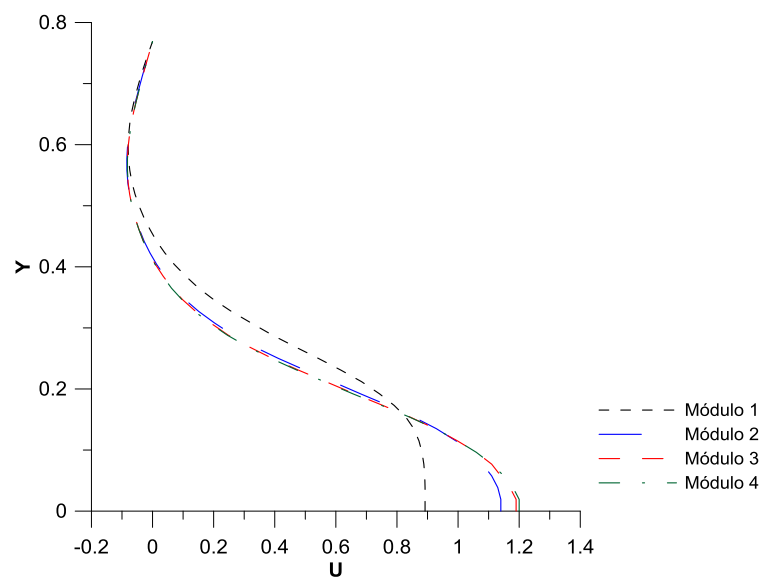


Figura 4.8: Comparação dos perfis de velocidade para $Re = 400$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ de acordo com o avanço dos módulos considerando o perfil da velocidade de entrada como uniforme.

Um comportamento semelhante pode ser observado nos trabalhos de Silva (2003) e de Castelões *et al.* (2007) nos quais em uma geometria semelhante a estudada no presente trabalho o perfil de velocidade dos dois primeiros módulos é diferente dos demais módulos.

Comparando as duas situações estudadas, foi observado que o escoamento tende a conservar a condição de contorno considerada no perfil de entrada nos dois primeiros módulos, porém, o perfil tende a estabilizar-se a partir do terceiro módulo para o mesmo valor independentemente da condição de entrada.

A influência desse comportamento é a diferença na recirculação notada principalmente no primeiro módulo. Para o perfil uniforme de velocidade de entrada o primeiro módulo apresenta menor área de recirculação comparado com os módulos a jusante do escoamento, como pode ser observado na Figura 4.9 para Reynolds 100, $H_{min}/H_{max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$.

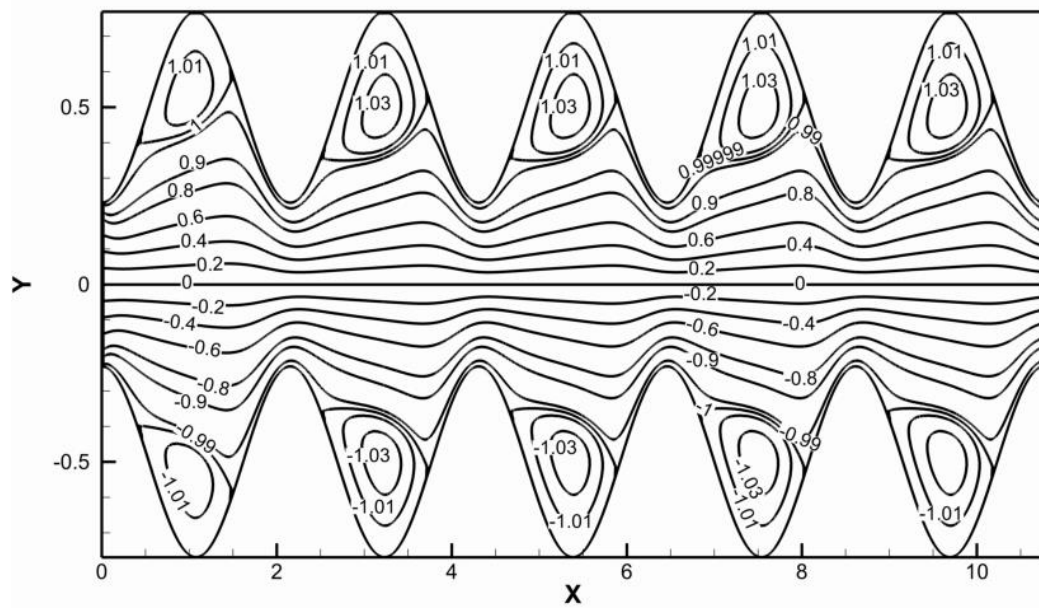


Figura 4.9: Isolinhas da função corrente para $Re = 100$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$

As Figuras 4.10, 4.11 e 4.12 mostram as isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 25, 100 e 400 para a configuração onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$ e, doravante, perfil de entrada uniforme considerando-se o quarto módulo para garantir que o campo de velocidade seja estável.

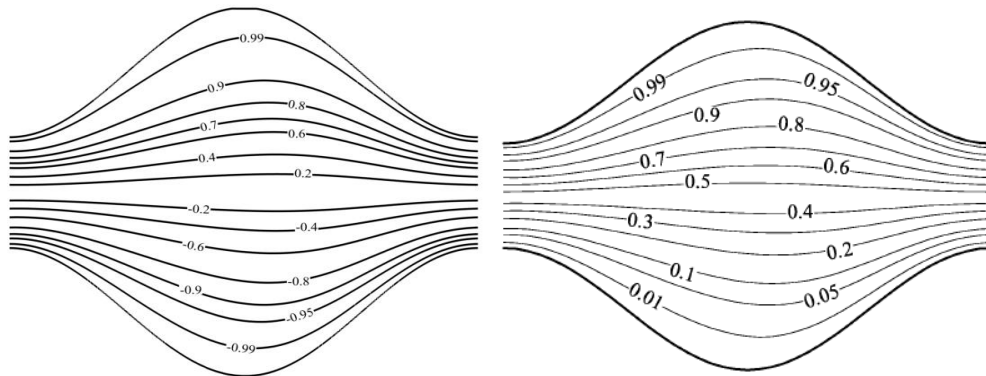


Figura 4.10: Isolinhas da função corrente para $Re = 25$, $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham *et al.* (2005)

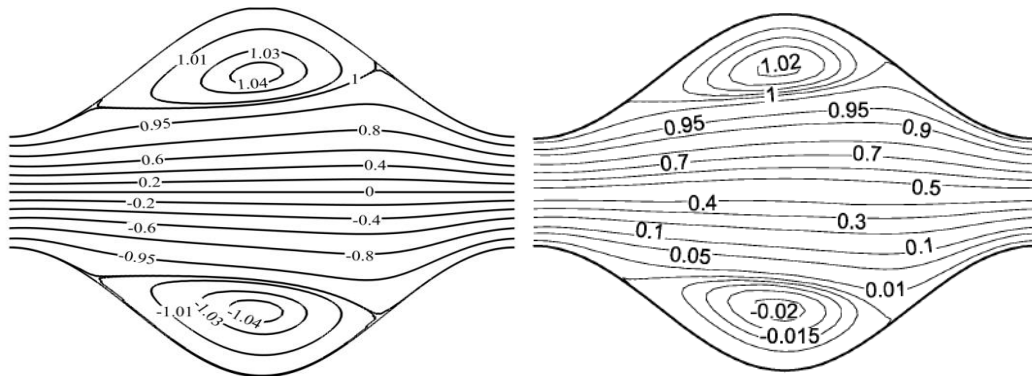


Figura 4.11: Isolinhas da função corrente para $Re = 100$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham *et al.* (2005)

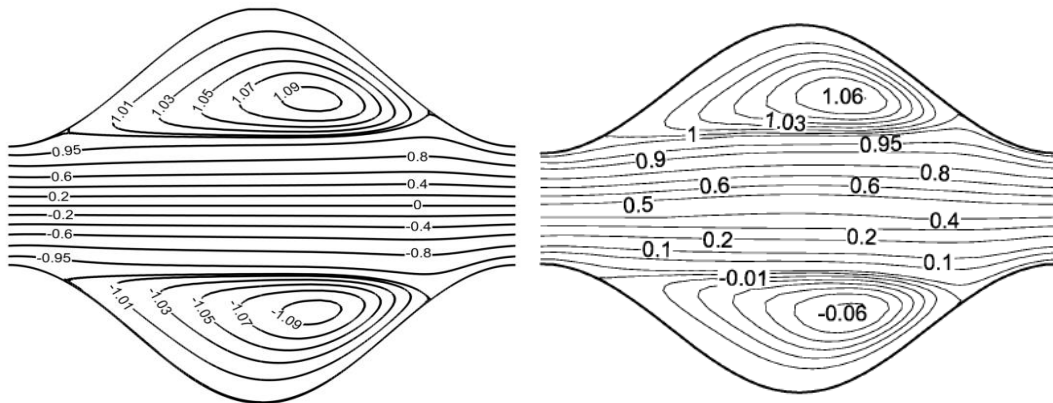


Figura 4.12: Isolinhas da função corrente para $Re = 400$, $H_{min}/H_{max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$. A esquerda resultados obtidos pela GITT, a direita resultados de Haitham *et al.* (2005)

Assim como nos resultados obtidos por Haitham *et al.* (2005) que, para a configuração considerada, a recirculação ocorre dentro da concavidade da função seno em Reynolds igual a 100 e em Reynolds igual a 400 a recirculação cobre praticamente toda a concavidade da parede, sendo a mesma ligeiramente deslocada para a direita no mesmo sentido do escoamento.

As linhas de corrente mostradas nas Figuras 4.10-12 são simétricas e suas magnitudes possuem mesmo módulo. O aumento na razão de altura (H_{min}/H_{max}) na configuração resultaria numa diminuição no tamanho da recirculação por causa de uma maior área de escoamento. De modo semelhante, um aumento na razão de comprimento (λ/a) resultaria numa diminuição no tamanho da recirculação por causa da suavidade da curvatura da parede.

Assim, foi observado que o aumento de um dos parâmetros H_{min}/H_{max} e λ/a diminui queda de pressão no canal diminuindo o aparecimento de vórtices, já a diminuição de um dos dois parâmetros considerados aumenta a chance de aparecimento de vórtices no escoamento.

Utilizando o número de Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ e $\lambda/a = 16$ não gera muita recirculação (Figura 4.13), pois os altos valores da razão de comprimento e da razão de aspecto suavizam a sinuosidade e alongam o comprimento do canal.

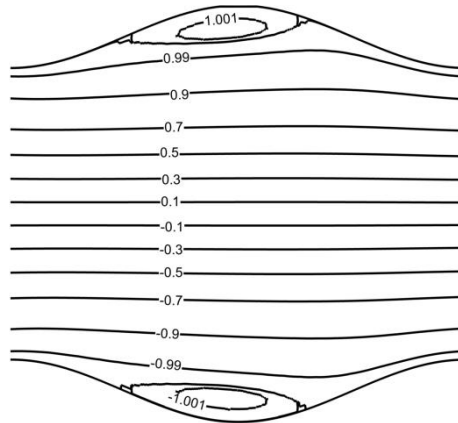


Figura 4.13: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$ e $\lambda/a = 16$

Para número de Reynolds de baixo valor, pode ser notado o aparecimento de regiões de recirculação de acordo com a conformação adotada, pois a diminuição do valor da razão de comprimento diminui o comprimento de onda e a diminuição da razão de altura faz com que a área do escoamento seja menor. Na configuração mais estreita de canal onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$ ocorre o aparecimento da recirculação para número de Reynolds igual a 25, como pode ser observado na Figura 4.14.

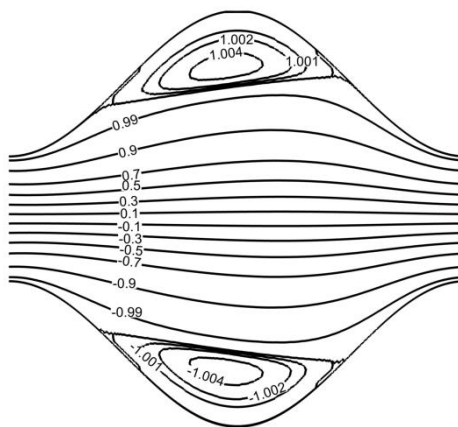


Figura 4.14: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 25, configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$

Na mesma configuração para número de Reynolds 100 é possível se observar uma forte recirculação ocupando uma parte significativa da concavidade (Figura 4.15). Para Reynolds 400 a vorticidade ocorre em praticamente toda concavidade e possui seu centro deslocado ligeiramente à jusante (Figura 4.16) assim como na configuração onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$.

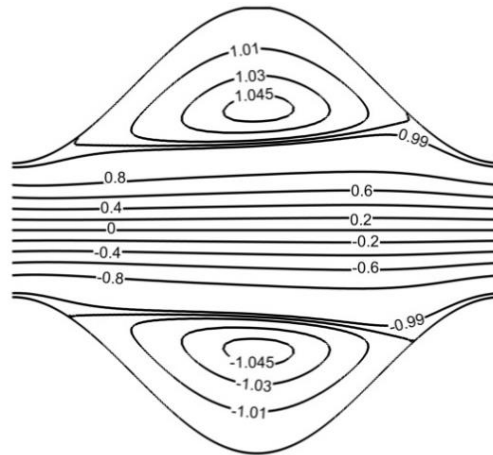


Figura 4.15: Gráfico das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 100, configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$

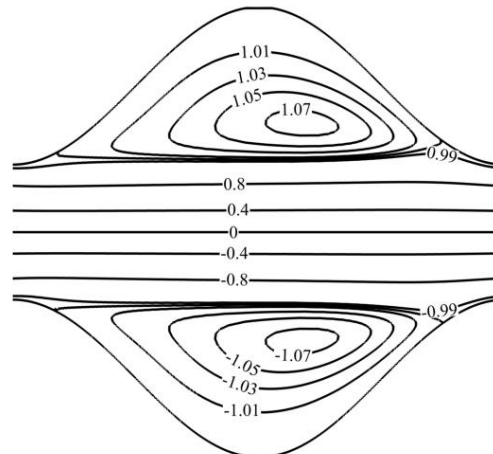


Figura 4.16: Gráficos das isolinhas da função corrente para Reynolds igual a 400, configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 4$

A influência dos dois parâmetros geométricos pode ser observada na Figura 4.17 (da esquerda para a direita $\lambda/a = 4, 8$ e 16 e de cima para baixo $H_{\min}/H_{\max} = 0.3, 0.5$ e 0.7) para Reynolds igual a 100, onde se nota que o aumento de um dos dois parâmetros diminui a zona de recirculação.

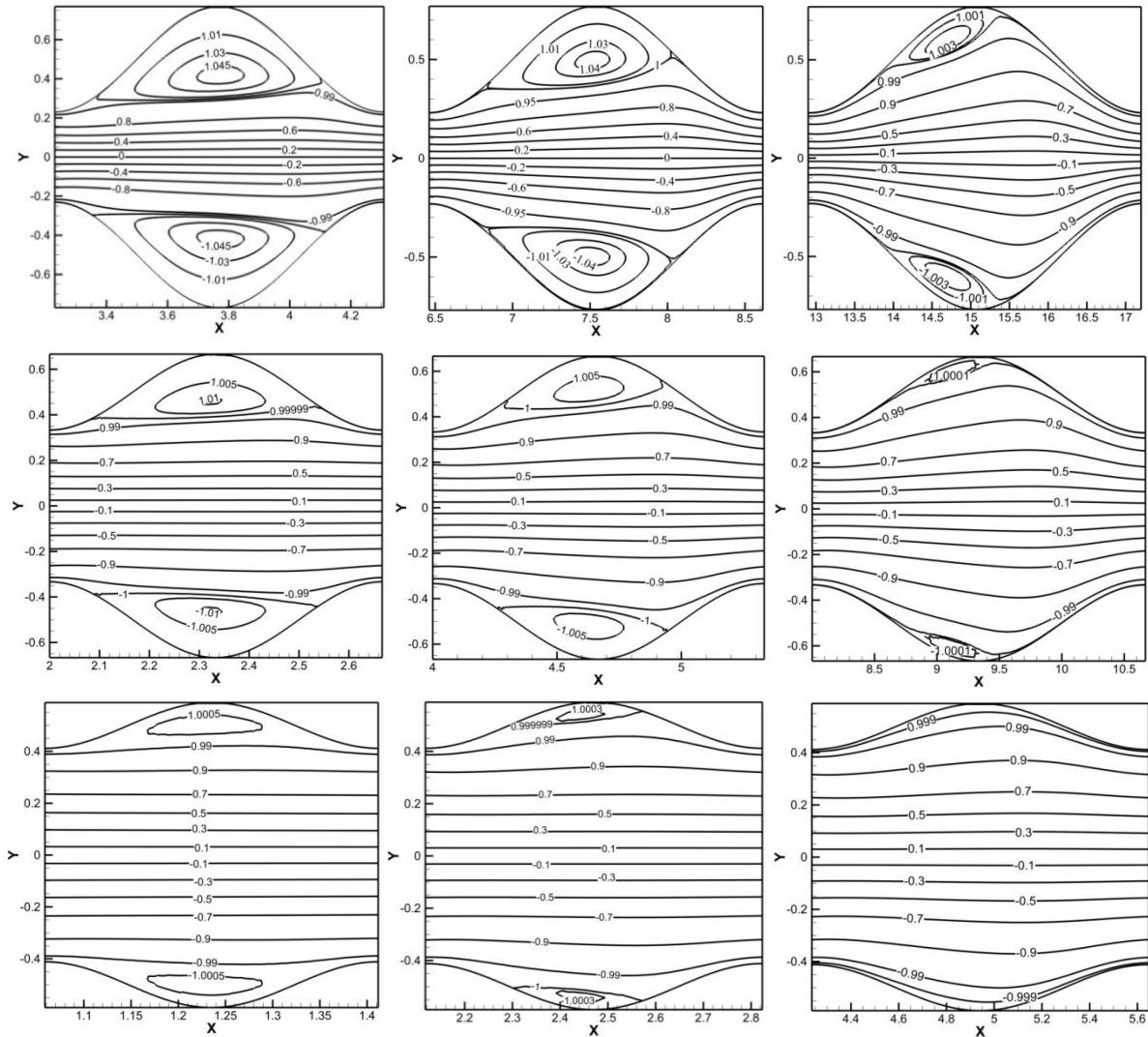


Figura 4.17: Variação do comportamento no canal de acordo com a variação dos parâmetros geométricos (da esquerda para a direita $\lambda/a = 4, 8$ e 16 e de cima para baixo $H_{\min}/H_{\max} = 0.3, 0.5$ e 0.7)

Dado um campo de velocidade, o coeficiente de atrito é geralmente definido baseado em uma força de cisalhamento equivalente na direção do escoamento por unidade de área superficial. Segundo Kundu (2001) independentemente se este cisalhamento é devido às forças viscosas ou se é essencialmente uma força de pressão, como no caso trocadores de calor com escoamento transversal, o comportamento do coeficiente de atrito será o mesmo.

O fator de atrito com base na tensão de cisalhamento é geralmente definido como:

$$f = \frac{2\tau_w}{\rho u_{av}^2} \quad (4.10)$$

Multiplicando-se pelo número de Reynolds, podemos determinar a relação (Anexo D):

$$\begin{aligned}
 f Re = & - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{y=y_2} + \sum_{i=1}^{NTV} \left(\Psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} \Big|_{y=y_2} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{y=y_2} + \right. \\
 & \left. - \sum_{i=1}^{NTV} \left(\Psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} \Big|_{y=y_2} + 2 \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \Big|_{y=y_2} + Y_i \Big|_{y=y_2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

As Figuras 4.18, 4.19 e 4.20 mostram a variação do fator de atrito ao longo do canal para Reynolds igual a 25, 100 e 400 para a configuração onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$.

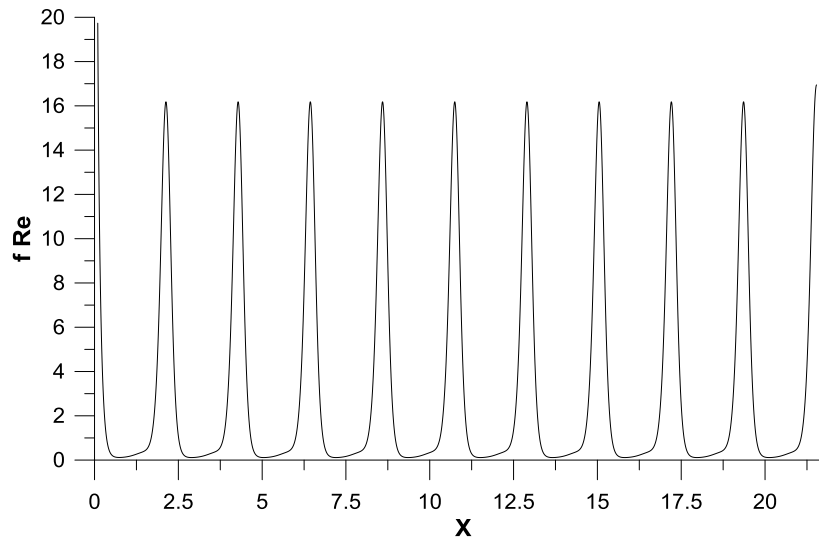


Figura 4.18: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 25 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$

Pode-se notar que no Figura 4.18 não existe valor onde o fator de atrito se anula, sendo assim não existe quebra da camada limite e conseqüentemente não existe recirculação conforme já observado na Figura 4.10. Além disso, como foi considerada a condição de saída do canal como um perfil completamente desenvolvido, existe um aumento do fator de atrito na saída do duto.

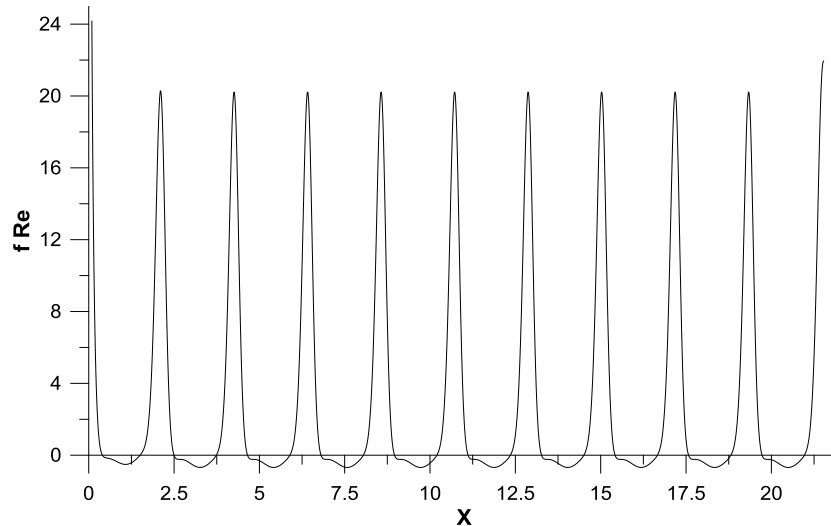


Figura 4.19: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 100 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$

Na Figura 4.19 o valor onde o fator de atrito se anula corresponde a quebra ou a formação da camada limite. A magnitude dos valores do fator de atrito são menores dentro da região de quebra e formação da camada limite devido ao baixo gradiente de velocidade axial negativo.

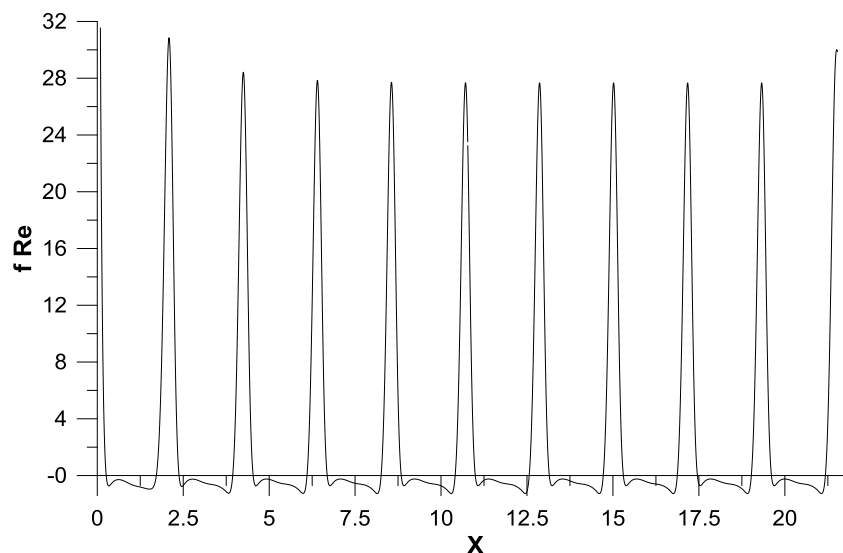


Figura 4.20: Gráfico do fator de atrito ao longo do duto para Reynolds igual a 400 a configuração com $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ e $\lambda/a = 8$

Na Figura 4.20, além dos pontos de quebra e formação da camada limite, pode-se observar dois valores de máximo locais. A magnitude dos valores do fator de atrito são menores dentro da região de quebra e junção da camada limite devido ao baixo gradiente de velocidade axial negativo.

O valor de mínimo local característico observado próximo às raízes de cada módulo nas Figuras 4.19 e 4.20 correspondem a pontos de maior vorticidade, nestes pontos as componentes de velocidade normais à parede são elevadas pelo escoamento inverso e a camada limite é conseqüentemente reduzida, conduzindo a um valor máximo, em módulo, de vorticidade na parede no interior da região de recirculação. Em cada módulo o maior valor absoluto desses pontos encontra-se deslocado ligeiramente para a direita confirmando os resultados das Figuras 4.11 e 4.12 onde a área de maior recirculação é deslocada a jusante do escoamento.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os resultados obtidos no Capítulo 4 mostram a aplicabilidade da Técnica da Transformada Integral Generalizada como uma ferramenta capaz de fornecer resultados suficientemente aproximados em problemas de escoamento em canais bidimensionais com paredes de geometria irregular envolvendo a solução das equações de Navier-Stokes reproduzindo resultados em boa concordância com os obtidos numericamente por Haitham *et al.* (2005) e Ragmandia & Saha. (2012).

Observou-se que a solução das equações de Navier-Stokes na forma de função corrente com ambas as condições de entrada estudadas (perfil uniforme e perfil completamente desenvolvido) gera perfis de velocidade $u(x,y)$ diferentes principalmente na parte inicial do escoamento (nos dois primeiros módulos), porém o perfil tende a possuir somente uma forma à medida que a coordenada axial cresce.

Notou-se para os casos estudados a função corrente converge mais lentamente na entrada do canal, principalmente em $x = 0$. Além disso, a convergência da GITT depende do quanto o escoamento gera de recirculação, ela é mais lenta nos casos onde existe maior recirculação sendo mais lenta nos casos onde $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 8$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$, $\lambda/a = 4$ ambos para Reynolds igual a 400.

O fator de atrito calculado possui o mesmo comportamento da literatura, porém o seu módulo não condiz com os valores apresentados pela literatura tanto numérico quanto experimentalmente. A diferença é provavelmente a adoção da equação do fator de atrito a partir da tensão na parede ao invés da pressão entre os módulos, o que, no presente trabalho, não é apropriado devido a formulação em termo de função corrente adotado na solução das equações de Navier-Stokes.

Observou-se também uma grande influência dos parâmetros λ/a e H_{\min}/H_{\max} os quais, para um número de Reynolds fixo, diminuem a recirculação à medida que os mesmos são aumentados. A configuração mais com maior área de escoamento ($\lambda/a = 16$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.7$) gera pouca recirculação em $Re = 400$. Considerando a configuração onde $\lambda/a = 4$ e $H_{\min}/H_{\max} = 0.3$ é possível gerar vorticidade em números de Reynolds de baixo valor ($Re = 25$). O aumento da razão de altura resulta na diminuição do tamanho da recirculação devido a maior área de escoamento. De forma similar, o aumento da razão de comprimento resulta no

decréscimo do tamanho da recirculação devido ao aumento da suavidade da função que descreve a parede.

Esse comportamento proporciona maior mistura do meio líquido e conseqüentemente elevando a transferência de calor e massa no interior do canal e pode ser aproveitado em microreatores tubulares em reações que necessitam de agitação para ocorrer como no caso da transesterificação para produção de biodiesel.

Uma dificuldade encontrada que impossibilitou a aplicação do método do presente trabalho em mais de uma geometria é a aparição de pontos de singularidade como, por exemplo, no duto em forma de arco onde não existe valor da derivada na fronteira entre cada módulo.

A próxima etapa para um trabalho futuro seria a investigação do mesmo escoamento em um canal tridimensional para investigar a recirculação tanto axial quanto transversal ao escoamento e as condições necessárias para o aparecimento dessas zonas. Além disso, geometrias alternativas também podem ser estudadas.

Ainda se propõe a inclusão da equação da energia acoplada à equação da quantidade de movimento a fim de se analisar o aumento transferência de calor devido ao aparecimento de áreas de recirculação em dutos de geometria irregular bidimensional e tridimensional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AHMED, M.A.; YUSOFF, M.Z.; SHUAIB, N.H. Effects of geometrical parameters on the flow and heat transfer characteristics in trapezoidal-corrugated channel using nanofluid. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 42, p. 69–74, 2013.
- ASAKO, Y. N.; FAGHRI, M. Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with corners. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. V.31, p. 1237-1245, 1988.
- BAHR-COHEN, A.; KRAUS, A. D. Advances in Thermal Modeling of Electronics Computational and Systems. V.2, p. 41-107, 1990.
- CASTELLÕES, F. V.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. Convective heat transfer enhancement in low Reynolds number flows with wavy walls. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. V. 53, p. 2022–2034, 2010.
- COTTA, R. M. Hybrid numerical/analytical approach to nonlinear diffusion problems. **Numerical Heat Transfer**, Part B. vol. 17, p. 217-226, 1990.
- COTTA, R. M. **Computational integral transform approach in nonlinear diffusion and convection-diffusion problems**. Laboratório di Ingeneria Nucleare di Montcuccolino, Serie Scientifica LIN-1202 (Invited Lecture). Università degli Studi di Bologna, Italy, July, 1992.
- COTTA, R. M. **Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- COTTA, R. M. Benchmark results in computational heat and fluid flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer** (Invited Paper), v.37, p.381-393, 1994.
- COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.29, n.10, p.1495-1501, 1986.
- COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Diffusion Problems with general Time-Dependent coefficients. **Revista Brasileira de Ciências Matemáticas**, v.9, n.4, p.269-292, 1987.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. Unified Integral Transform Method. **Journal Braz. Assoc. Mech. Sciences**, RBCM (Invited Paper), v. 12, p. 301-310, 1990.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. The integral Transform Method. **Applied Math. Modeling**, v.17, p. 156-161, 1993.
- FIGUEIRA da SILVA; COTTA, R. M. Benchmark results for internal forced convection through integral transformation. **Integral Communications in heat and Mass Transfer**. V. 23, p. 1019-1029, 1996.
- GOLDSTEIN, L.; SPARROW, E. M. Heat/Mass characteristics for flow in a corrugated wall channel. **Journal of Hear Transfer**, ASME, v. 99, p. 187-195, 1977.

HAITHAM, M. S. B.; ANAND, N. K.; CHEN, H. C. Numerical study of heat and momentum transfer in channels with wavy walls. **Numerical Heat Transfer**, Part A, v.47, p. 417–439, 2005.

HAITHAM, M. S. B.; SAHIN, A. Z. Thermodynamic analysis of fluid flow in channels with wavy sinusoidal walls. **Thermal Science**, v. 17, n. 3, p. 813-822, 2013.

IMSL LIBRARY, Math/Lib. Houston, TX, 1991.

JALURIA, Yogesh. **Design and optimization of thermal systems**. CRC Press, 2008.

KAYS, W. M.; LONDON, A. L. Compact Heat Exchangers. McGraw-Hill, Ney York, 1984.

KAWAGUTI, M.; Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the Flow in a Two-dimensional cavity. **Journal of Physical Society Japan**, v. 16, p. 2302-2315, 1961.

KUNDU, Jadeep. **Numerical Investigation of Laminar Forced Convection in Two-Dimensional and Three-Dimensional Sinusoidal Corrugated Ducts**. Tese de Mestrado. Department of Mechanical Engineering, Andhra University, 2001.

LEITE, S. Q. D; ÖZISIK, M. N. On the solution of linear diffusion problem in media with moving boundaries. *Nucl. Science and Eng.*, v.76, p.345-350, 1980.

LIMA, G. G. C.; SANTOS, C. A. C.; HAAG, A.; COTTA, R. M. Cotta. Integral transform solution of internal flow problems based on Navier–Stokes equations and primitive variables formulation. **Int. J. Numer. Meth. Engng**. v. 69, p.544–561, 2007.

LUIKOV, A. V. **Heat and Mass Transfer**. Mir Publishers, Moscow, 1973.

MACHADO H. A.; COTTA, R. M. Integral transform method dor boundary layer equations in simultaneous heat and fluid flow. **International Journal Numerical Methods Heat & Fluid Flow Problems**. V.5, p.225-237, 1995.

MAHMUD, S.; SARDUL ISLAM, A. K. M.; MAMUN, M. A. H. Separation characteristics of fluid flow inside two parallel plates with wavy surface. **International Journal of Engineering Science**. v. 40, p. 1495–1509, 2002.

MATHEMATICA. Standart Version 9.0.1, Champaign, Illinois, 2013.

MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion**. John Wiley, New York, 1984.

NICENO, B.; NOBILE, E. Numerical analysis of fluid flow and heat transfer in periodic wavy channels. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v.22, p. 156-167, 2001.

NISHIMURA, T.; MURAKAMI, S.; ARAKAWA, S.; KAWAMURA, Y. Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds numbers for steady flow. **International Journal of Heat Mass Transfer**. v. 33. n. 5. p. 835-845, 1990.

OVIEDO-TOLENTINO, F.; MÉNDEZ, R. R.; HÉRNANDEZ-GUERRERO, A.; GIRÓN-PALOMARES, B. Experimental study of fluid flow in the entrance of a sinusoidal channel. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. V.29, p. 1233–1239, 2008.

ÖZISIK, M. N. & MURRAY, R. L. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary conditions parameters. **Journal of Heat Transfer**. Vol. 96, p. 48-51, 1974.

ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**, John Wiley, New York, 1980.

PARVIN, S.; HOSSAIN, F. N. Finite element simulation of MHD combined through a triangular wavy channel. **International Communications in Heat and Mass Transfer**. Vol. 39, p. 811-817, 2012.

PÉREZ-GUERRERO, J. S. **Solução das equações de Navier-Stokes em Formulação de função corrente via transformação Integral**. Tese de Mestrado, PEM/COPPE, Rio de Janeiro, 1991.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; COTTA, R. M. Integral transform solution for the lid-driven cavity flow problem in streamfunction-only formulation. **International journal for numerical methods in fluids**, v. 15, p. 399-409, 1992.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; COTTA, R. M. Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation. **International journal for numerical methods in fluids**. v. 20, p. 1203-1213, 1995.

PÉREZ-GUERRERO, J. S. **Transformação Integral das equações de Navier-Stokes para escoamento laminar em canais de Geometria Bidimensional Arbitrária**. Tese de Doutorado, PEM/COPPE, Rio de Janeiro, 1995.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms. **Computational Mechanics**. v. 25, p. 413-420, 2000.

RAMGADIA, A. G.; SAHA, Arun K. Fully developed flow and heat transfer characteristics in a wavy passage: Effect of amplitude of waviness and Reynolds number. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.55, p.2494–2509, 2012.

RAMGADIA, A. G.; SAHA, Arun K. Numerical study of fully developed flow and heat transfer in a wavy passage. **International Journal of Thermal Sciences**. v. 67, p. 152-166, 2013.

RUSH, T. A.; NEWELL, T. A.; JACOBI, A. M. An experimental study flow and heat transfer in sinusoidal wavy passages. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v.31, p. 430-442, 1999.

SILVA, R. L. **A Técnica da Transformada Integral Generalizada no Escoamento e na Transferência de Calor em Dutos**. Tese de Doutorado, PPGEM/UFPB, João Pessoa-Paraíba, 2003.

SILVA, R. L.; QUARESMA, J. N. N.; SANTOS, C. A. C.; COTTA, R. M. Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**. V. 21. n. 2, p. 219-243, 2011.

STALIO, E.; PILLER, M. Direct Numerical Simulation of Heat Transfer in Converging–Diverging Wavy Channels. **Journal of Heat Transfer**. V.129, p. 769-777, 2007.

STONE, K.; VANKA, S. P. Numerical Study of Developing Flow and Heat Transfer in a Wavy Passage. **Journal of Fluids Engineering**, v. 121, 1999.

SUI, Y.; TEO, C.J.; LEE, P.S.; CHEW, Y.T.; SHU, C. Fluid flow and heat transfer in wavy microchannels. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, p.2760–2772, 2010.

SUNDEN, B.; TROLLHEDEN, S. Periodic Laminar flow and heat transfer in a corrugated two-dimensional channel. **International Communications in Heat and Mass Transfer**. V.16, p. 215-225, 1989.

WANG, G.; VANKA, S. P. Convective heat transfer in periodic wavy passages. **International Journal Heat Mass Transfer**. v. 38, n. 17, p. 3219-3230, 1995.

WANG, C.-C.; CHEN, C.-K. Forced convection in a wavy-wall channel. **International Journal Heat and Mass Transfer**, v.45, p. 2587–2595, 2002.

WHITE, Frank M. **Mecânica dos fluidos**. Porto Alegre: AMGH, 2011.

XIAO, Q.; XIN, R. C.; TAO, W. Q. Analysis of fully developed laminar flow and heat transfer in asymmetric wavy channels. **Integral Communications in Heat and Mass Transfer**. V. 16, p. 227-236, 1989.

XIE, G-N.; WANG, Q-W.; ZENG, M.; LUO, L-Q. Numerical investigation of heat transfer and fluid flow characteristics inside a wavy channel. **Heat Mass Transfer**. v. 43, p. 603–611, 2007.

ANEXO A

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA E COEFICIENTES DO SISTEMA DIFERENCIAL

Definindo:

$$L_1[f, g] = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \right) \quad (\text{A.1.a})$$

$$L_2[f] = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) \quad (\text{A.1.b})$$

A aplicação do filtro na equação geral (3.2) resulta em:

$$L_1[\phi, \phi] + L_1[\phi, F] + L_1[F, \phi] + L_1[F, F] = L_2[\phi] + L_2[F] \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a transformação integral para cada termo da equação (A.2):

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i L_1[\phi, \phi] dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \right] dy \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \psi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left[\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} \psi_k + \frac{\partial^3 \psi_k}{\partial x^3} Y_k + 3 \left(\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \frac{\partial Y_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} + \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^3} \right] dy \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j \psi_k \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^2} \right) dy + \\ &\quad \psi_j \psi_k' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \left(3 \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} \right) dy + \\ &\quad \psi_j \psi_k'' \int_{-y_1}^{y_2} 3 Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial Y_k}{\partial x} dy + \psi_j \psi_k''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} Y_k dy \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \psi_j + Y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \frac{\partial Y_k}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} + \right. \\ &\quad \left. \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} + \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_j \psi_k \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} \right) dy + \\
&\quad \psi_j \psi_k' \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy + \psi_j \psi_k'' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy + \\
&\quad \psi_j' \psi_k \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} \right) dy + \\
&\quad \psi_j' \psi_k' \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i Y_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy + \psi_j' \psi_k'' \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i Y_j \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\int_{-y_1}^{y_2} L_1[\phi, F] dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) \right] dy \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \psi_j \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) dy
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x} \psi_j + Y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy + \\
&\quad \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\int_{-y_1}^{y_2} L_1[F, \phi] dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) \right] dy \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y} \left[\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} \psi_j + Y_j \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} + 3 \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^3} \right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial F}{\partial y} dy + \\
&\quad \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(3 \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} \right) \frac{\partial F}{\partial y} dy + \\
&\quad \psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} 3 Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} dy + \psi_j''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial F}{\partial y} dy
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \psi_j' \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \right) dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \right) dy + \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} dy
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i L_1[F, F] dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) \right] dy \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i L_2[F] dy &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) \right] dy \\
&= \frac{1}{\text{Re}} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Onde $\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i L_2[\phi] dy = \frac{1}{\text{Re}} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) \right] dy \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} dy &= \sum_{j=1}^{\infty} Y_i \left(\int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} \psi_j dy + 4 \int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} \psi_j' dy + 6 \psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} dy + \right. \\
&\quad \left. 4 \int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \psi_j''' dy + Y_j \psi_i^{(iv)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} dy + 4 \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} dy + \right. \\
&\quad \left. 6 \psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} dy + 4 \psi_j''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} dy \right) + N \psi_i^{(iv)}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} dy &= \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \frac{\partial Y_j}{\partial y} + 2 \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dy \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\psi_j \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2} dy + 4 \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} dy + 2 \psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} dy \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^4 Y_j}{\partial y^4} \psi_j \right) dy = \mu_i^4 N \psi_i \quad (\text{A.18})$$

Deixando em evidência o diferencial de 4ª ordem e reordenando de maneira conveniente, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^{(iv)} &= -\mu_i^4 \bar{\phi}_i + \frac{L_i}{N} + \frac{\text{Re}}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k A_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k B_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k C_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k D_{ijk} + \right. \\ &\quad \left. \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k E_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k F_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k G_{ijk} \right\} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \bar{\phi}_j H_{ij} + \bar{\phi}_j I_{ij} + \bar{\phi}_j J_{ij} + \bar{\phi}_j K_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Onde:

$$\begin{aligned} A_{ijk} &= \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy \\ &\quad - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$B_{ijk} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} dy - 2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \quad (\text{A.19})$$

$$C_{ijk} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial Y_k}{\partial x} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \quad (\text{A.20})$$

$$D_{ijk} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} Y_k dy \quad (\text{A.21})$$

$$E_{ijk} = - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \quad (\text{A.22})$$

$$F_{ijk} = -2 \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \quad (\text{A.23})$$

$$G_{ijk} = - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \quad (\text{A.24})$$

$$H_{ij} = \text{Re} a_{ij} - b_{ij} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{I}_{ij} = \text{Re } \mathbf{c}_{ij} - \mathbf{d}_{ij} \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \text{Re } \mathbf{e}_{ij} - \mathbf{f}_{ij} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \text{Re } \mathbf{g}_{ij} - \mathbf{h}_{ij} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{L}_i = \text{Re } \mathbf{i}_i - \mathbf{j}_i \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij} = & \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial y} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial y} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x \partial y^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial x} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial x} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial y^3} dy \\ & + \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial y^3} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy + \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial y^3} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^4 \mathbf{Y}_j}{\partial x^4} dy + 2 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^4 \mathbf{Y}_j}{\partial x^2 \partial y^2} dy \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{ij} = & \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_j \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_j \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial y^3} dy + 3 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_j}{\partial x^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy \\ & + \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_j}{\partial y^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy - 2 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{d}_{ij} = 4 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial x^3} dy + 4 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^3 \mathbf{Y}_j}{\partial x \partial y^2} dy \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{e}_{ij} = 3 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} dy \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{f}_{ij} = 6 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_j}{\partial x^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial^2 \mathbf{Y}_j}{\partial y^2} dy \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{g}_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_j \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} dy \quad (\text{A.36})$$

$$\mathbf{h}_{ij} = 4 \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \frac{\partial \mathbf{Y}_j}{\partial x} dy \quad (\text{A.37})$$

$$\mathbf{i}_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{\partial^3 \mathbf{F}}{\partial y^3} \right) dy \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{j}_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \mathbf{Y}_i \left(\frac{\partial^4 \mathbf{F}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \mathbf{F}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dy \quad (\text{A.39})$$

Considerando-se o perfil de entrada uniforme, as condições de contorno do duto truncado em $x = 0$ são:

$$u = 1 \text{ e } v = 0 \quad (\text{A.40.a,b})$$

Ou em termos de função corrente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.41.a,b})$$

Assim, em termos da variável ξ :

$$\int_{-\frac{H_{\min}}{2}}^y \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi = \int_{-\frac{H_{\min}}{2}}^y 1 d\xi \quad (\text{A.42.a,b})$$

$$\psi = k_1 + y + \frac{H_{\min}}{2} \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.43.a,b})$$

Em $x = 0$:

$$\phi = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{\min}^2} y^3 \quad (\text{A.44.a})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (\text{A.44.b})$$

Aplicando a transformação integral em A.44.b:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{NTV} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x} \bar{\phi}_i + Y_i \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{i=1}^{NTV} \left[\frac{\partial Y_i}{\partial x} \Big|_{x=0} \bar{\phi}_i(0) + Y_i(0, y) \frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} \right] \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{i=1}^{NTV} Y_i(0, y) \frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.47})$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} \left[\frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(0, y) Y_j(0, y) dy \right] = 0 \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.49})$$

Aplicando a transformação integral em (A.44.a):

$$\phi(0, y) = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{\min}^2} y^3 \quad (\text{A.50})$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} Y_i(0, y) \bar{\phi}_i(0) = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{\min}^2} y^3 \quad (\text{A.51})$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} \left[\bar{\phi}_i(0) \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(0, y) Y_j(0, y) dy \right] = \int_{-y_1}^{y_2} \left(-\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{\min}^2} y^3 \right) Y_i(0, y) dy \quad (\text{A.52})$$

$$N(0) \bar{\phi}_i(0) = \int_{-y_1}^{y_2} \left(-\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{\min}^2} y^3 \right) Y_i(0, y) dy \quad (\text{A.53})$$

Mudando a variável para ξ :

$$H_{\min} \bar{\phi}_i(0) = y_0 \int_{-1}^1 \left(-\frac{y_0(0)\xi}{2} + \frac{2y_0^3(0)\xi^3}{H_{\min}^2} \right) Y_i(\xi) d\xi \quad (\text{A.54})$$

$$\bar{\phi}_i(0) = \frac{H_{\min}}{8} \int_{-1}^1 (\xi^3 - \xi) Y_i(\xi) d\xi \quad (\text{A.55})$$

ANEXO B

COEFICIENTES DO SISTEMA APÓS A MUDANÇA DE VARIÁVEL

Considerando:

$$\xi = \frac{y - y_3(x)}{y_0(x)}, \quad p = \frac{1}{y_0(x)} \quad \text{e} \quad q = \frac{y_3(x)}{y_0(x)} \quad (\text{B.1.a,b,c})$$

$$\xi = yp - q \quad (\text{B.2})$$

Assim:

$$\frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} = \xi W_{(n)} - S_{(n)} \quad (\text{B.3})$$

onde:

$$W_{(n)} = y_0(x)p^{(n)} \quad \text{e} \quad S_{(n)} = y_3(x)p^{(n)} - q^{(n)} \quad (\text{B.4.a,b})$$

Desta forma, qualquer derivada de uma autofunção em relação a x poderá ser representada facilmente como uma derivada em ξ , ao se aplicar a regra da cadeia. As derivadas da autofunção em relação a y são calculadas mais facilmente como:

$$\frac{\partial^n Y_i}{\partial y^n} = \frac{\partial^n Y_i}{\partial \xi^n} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^n \quad (\text{B.5})$$

Como $\frac{\partial \xi}{\partial y} = p$

$$\frac{\partial^n Y_i}{\partial y^n} = \frac{\partial^n Y_i}{\partial \xi^n} p^n \quad (\text{B.6})$$

Os coeficientes do Anexo A, foram então calculados fornecendo as expressões (B.1-6) ao software Mathematica[®], com o qual se gerou a seguinte representação para os coeficientes:

Coeficientes “Tridimensionais”:

$$A_{ijk} = A1(x)A1_{ijk} + A2(x)A2_{ijk} + A3(x)A3_{ijk} + A4(x)A4_{ijk} + A5(x)A5_{ijk} \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned} A1(x) &= 2(W'W'' - W'^3); & A2(x) &= W''' - W'W''; \\ A3(x) &= 2(W''S' + W'S'' - 2W'^2S'); & & \\ A4(x) &= S''' - W''S'; & A5(x) &= 2(S'S'' + p'p'' - W'S'^2) \end{aligned} \quad (B.8.a-e)$$

$$B_{ijk} = B1(x)B1_{ijk} + B2(x)B2_{ijk} + B3(x)B3_{ijk} + B4(x)B4_{ijk} + B5(x)B5_{ijk} \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned} B1(x) &= W'^2; & B2(x) &= 3W''' - 2W'^2; & B3(x) &= 2W'S' \\ B4(x) &= 3S''' - 2W'S'; & B5(x) &= p^2 - S'^2 \end{aligned} \quad (B.10.a-e)$$

$$\begin{aligned} B1_{ijk} &= A1_{ijk}; & B2_{ijk} &= A2_{ijk}; & B3_{ijk} &= A3_{ijk}; \\ B4_{ijk} &= A4_{ijk}; & B5_{ijk} &= A5_{ijk} \end{aligned} \quad (B.11.a-e)$$

$$C_{ijk} = C1(x)C1_{ijk} + C2(x)C2_{ijk} \quad (B.12)$$

$$C1(x) = 2W'; \quad C2(x) = 2S' \quad (B.13.a,b)$$

$$C1_{ijk} = A2_{ijk}; \quad C2_{ijk} = A4_{ijk} \quad (B.14.a,b)$$

$$D_{ijk} = \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k d\xi \quad (B.15)$$

$$\begin{aligned} E_{ijk} &= E1(x)E1_{ijk} + E2(x)E2_{ijk} + E3(x)E3_{ijk} + E4(x)E4_{ijk} + \\ &E5(x)E5_{ijk} + E6(x)E6_{ijk} \end{aligned} \quad (B.16)$$

$$\begin{aligned} E1(x) &= -2W'^2; & E2(x) &= -2W'S'; & E3(x) &= -(W'' + 2W'^2) \\ E4(x) &= -(p^2 + S'^2); & E5(x) &= -(2W'S' + S''); & E6(x) &= -W'' \end{aligned} \quad (B.17.a-f)$$

$$\begin{aligned} E1_{ijk} &= A6_{ijk}; & E2_{ijk} &= A7_{ijk}; & E3_{ijk} &= A8_{ijk}; \\ E4_{ijk} &= A9_{ijk}; & E5_{ijk} &= A10_{ijk}; & E6_{ijk} &= A11_{ijk} \end{aligned} \quad (B.18.a-f)$$

$$F_{ijk} = F1(x)F1_{ijk} + F2(x)F2_{ijk} + F3(x)F3_{ijk} \quad (B.19)$$

$$F1(x) = -2W'; \quad F2(x) = -2S'; \quad F3(x) = -2W' \quad (B.20.a-c)$$

$$F1_{ijk} = A8_{ijk}; \quad F2_{ijk} = A10_{ijk}; \quad F3_{ijk} = A11_{ijk} \quad (B.21.a-c)$$

$$F_{ijk} = A11_{ijk} \quad (B.22)$$

Onde as integrais:

$$\begin{aligned}
 A1_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j Y_k'' d\xi \\
 A2_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j Y_k' d\xi \\
 A3_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j Y_k'' d\xi \\
 A4_{ijk} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k' d\xi \\
 A5_{ijk} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k'' d\xi \\
 A6_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j Y_k''' d\xi \\
 A7_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j Y_k''' d\xi \\
 A8_{ijk} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j Y_k'' d\xi \\
 A9_{ijk} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k''' d\xi \\
 A10_{ijk} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k'' d\xi \\
 A11_{ijk} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j Y_k' d\xi
 \end{aligned} \tag{B.23.a-j}$$

Podem ser avaliadas analiticamente no software Mathematica[®].

Coefficientes “Bidimensionais”:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= a1(x)a1_{ij} + a2(x)a2_{ij} + a3(x)a3_{ij} + a4(x)a4_{ij} + a5(x)a5_{ij} + \\
 & a6(x)a6_{ij} + a7(x)a7_{ij} + a8(x)a8_{ij} + a9(x)a9_{ij}
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
 a1(x) &= 2(fqW'^3 - fqW'W''); \\
 a2(x) &= 4fqW'^2S' - 2fqW'''S' - 2fqW'S''; \\
 a3(x) &= 4fqW'^3 - 2fqW''' - 2fqW'W''; \\
 a4(x) &= 2fq(W'W'' - S'S'' - pp' - W'^3 + W'S'^2); \\
 a5(x) &= fq(8W'^2S' + S''' - 4W'S'' - 2W''S'); \\
 a6(x) &= 2fq(W'S'' - W''S'' - 2W'^2S'); \\
 a7(x) &= 2fq(W''' - W'W'' - 2S'S' - 2pp' + 2W'S'^2); \\
 a8(x) &= 2fq(pp' - S'S'' - W'S'^2); \\
 a9(x) &= 2fq(S''' - W''S')
 \end{aligned} \tag{B.25.a-i}$$

$$\text{Onde } fq = \frac{4}{3}Q$$

$$\begin{aligned} b_{ij} = & b1(x)b1_{ij} + b2(x)b2_{ij} + b3(x)b3_{ij} + b4(x)b4_{ij} + b5(x)b5_{ij} + b6(x)b6_{ij} + \\ & b7(x)b7_{ij} + b8(x)b8_{ij} + b9(x)b9_{ij} + b10(x)b10_{ij} + b11(x)b11_{ij} + b12(x)b12_{ij} + \\ & b13(x)b13_{ij} + b14(x)b14_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} b1(x) = & (W'\mu_j^*)^4 / p; \quad b2(x) = 6W'^2 W'' / p; \quad b3(x) = 4W'^3 S'\mu_j^{*4} / p; \\ b4(x) = & 12W'W''S' / p + 6W'^2 S'' / p; \quad b5(x) = 4W'W'''' / p + 3W''^2 / p; \\ b6(x) = & 6W'^2 S'^2 \mu_j^{*4} / p + 2pW'^2 \mu_j^{*4}; \\ b7(x) = & 6W''S'^2 / p + 12W'S'S'' / p + 2pW'' + 8p'W'; \\ b8(x) = & 4W'S'''' / p + 4W''''S' / p + 6W''S'' / p; \quad b9(x) = W^{(iv)} / p; \\ b10(x) = & 4W'S'^3 \mu_j^{*4} / p + 4p'S'\mu_j^{*4}; \quad b11(x) = 6S'^2 S'' + 2pS'' + 8p'S'; \\ b12(x) = & 4S'S'''' / p + 3S''^2 / p + 4p'' + 4p'W'; \quad b13(x) = S^{(iv)} / p; \\ b14(x) = & S'\mu_j^{*4} / p + 2pS'\mu_j^{*4} \end{aligned} \quad (\text{B.26.a-m})$$

$$\begin{aligned} b1_{ij} = & a12_{ij}; \quad b2_{ij} = a13_{ij}; \quad b3_{ijk} = a3_{ij}; \quad b4_{ijk} = a15_{ij}; \quad b5_{ijk} = a4_{ij}; \\ b6_{ij} = & a6_{ij}; \quad b7_{ij} = a16_{ij}; \quad b8_{ijk} = a6_{ij}; \quad b9_{ijk} = a7_{ij}; \quad b10_{ijk} = a10_{ij}; \\ b11_{ij} = & a17_{ij}; \quad b12_{ij} = a11_{ij}; \quad b13_{ijk} = a8_{ij}; \quad b14_{ijk} = a8_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.27.a-m})$$

$$\begin{aligned} c_{ij} = & c1(x)c1_{ij} + c2(x)c2_{ij} + c3(x)c3_{ij} + c4(x)c4_{ij} + c5(x)c5_{ij} + c6(x)c6_{ij} + \\ & c7(x)c7_{ij} + c8(x)c8_{ij} + c9(x)c9_{ij} + c10(x)c10_{ij} + c11(x)c11_{ij} + c12(x)c12_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} c1(x) = & -fqW'^2; \quad c2(x) = -2fqW'S'; \quad c3(x) = fq(2W'^2 - 3W''); \\ c4(x) = & fq(W'^2 - S'^2 - p^2); \quad c5(x) = fq(2W'S' - 3S''); \\ c6(x) = & fq(3W'' - 6W'^2); \quad c7(x) = 2fqW'S'; \quad c8(x) = 4fq(3W'' - 2W'^2); \\ c9(x) = & fq(2S'' - 8W'S'); \quad c10(x) = fq(S'^2 + p'^2); \quad c11(x) = fq(3S'' - 2W'S'); \\ c12(x) = & fq(2p^2 - 2S'^2 - W'') \end{aligned} \quad (\text{B.29.a-l})$$

$$\begin{aligned} c1_{ij} = & a1_{ij}; \quad c2_{ij} = a2_{ij}; \quad c3_{ijk} = a3_{ij}; \quad c4_{ijk} = a4_{ij}; \quad c5_{ijk} = a5_{ij}; \\ c6_{ij} = & a9_{ij}; \quad c7_{ij} = a6_{ij}; \quad c8_{ijk} = a7_{ij}; \quad c9_{ijk} = a10_{ij}; \quad c10_{ijk} = a11_{ij}; \\ c11_{ij} = & a8_{ij}; \quad c12_{ij} = a9_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.30.a-l})$$

$$\begin{aligned} d_{ij} = & d1(x)d1_{ij} + d2(x)d2_{ij} + d3(x)d3_{ij} + d4(x)d4_{ij} + d5(x)d5_{ij} + d6(x)d6_{ij} + \\ & d7(x)d7_{ij} + d8(x)d8_{ij} + d9(x)d9_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned}
d1(x) &= 4W^3/p; & d2(x) &= 12W^2S'/p; & d3(x) &= 12W'W''/p; \\
d4(x) &= 12W'S^2/p + 4p'; & d5(x) &= 12W''S'/p + 12W'S''/p; \\
d6(x) &= 4W'''/p; & d7(x) &= 4S^3/p + 4pS'; & d8(x) &= 12S'S''/p + 8p'; \\
d9(x) &= 4S'''/p
\end{aligned} \tag{B.32.a-i}$$

$$\begin{aligned}
d1_{ij} &= a13_{ij}; & d2_{ij} &= a15_{ij}; & d3_{ijk} &= a4_{ij}; & d4_{ijk} &= a16_{ij}; & d5_{ijk} &= a6_{ij}; \\
d6_{ij} &= a7_{ij}; & d7_{ij} &= a17_{ij}; & d8_{ijk} &= a11_{ij}; & d9_{ijk} &= a8_{ij}
\end{aligned} \tag{B.33.a-i}$$

$$e_{ij} = e1(x)e1_{ij} + e2(x)e2_{ij} + e3(x)e3_{ij} + e4(x)e4_{ij} \tag{B.34}$$

$$e1(x) = -2fqW'; \quad e2(x) = -2fqS'; \quad e3(x) = -e1(x); \quad e4(x) = -e2(x) \tag{B.35.a-d}$$

$$e1_{ij} = a3_{ij}; \quad e2_{ij} = a5_{ij}; \quad e3_{ijk} = a7_{ij}; \quad e4_{ijk} = a8_{ij} \tag{B.36.a-d}$$

$$f_{ij} = f1(x)f1_{ij} + f2(x)f2_{ij} + f3(x)f3_{ij} + f4(x)f4_{ij} + f5(x)f5_{ij} \tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}
f1(x) &= 6W^2/p; & f2(x) &= 12W'S'/p; & f3(x) &= 6W''/p; \\
f4(x) &= 6S^2/p + 2p; & f5(x) &= 6S''/p
\end{aligned} \tag{B.38.a-e}$$

$$f1_{ij} = a4_{ij}; \quad f2_{ij} = a6_{ij}; \quad f3_{ijk} = a7_{ij}; \quad f4_{ijk} = a10_{ij}; \quad f5_{ijk} = a8_{ij} \tag{B.39.a-e}$$

$$h_{ij} = h1(x)h1_{ij} + h2(x)h2_{ij} \tag{B.40}$$

$$h1(x) = 4W'; \quad h2(x) = 4S' \tag{B.40.a,b}$$

$$h1_{ij} = a7_{ij}; \quad h2_{ij} = a8_{ij} \tag{B.41.a,b}$$

Onde as integrais:

$$a1_{ij} = \int_{-1}^1 \xi^4 Y_i Y_j'' d\xi$$

$$a2_{ij} = \int_{-1}^1 \xi^3 Y_i Y_j'' d\xi$$

$$a3_{ij} = \int_{-1}^1 \xi^3 Y_i Y_j' d\xi$$

$$a4_{ij} = \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j'' d\xi$$

$$a5_{ij} = \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j' d\xi \tag{B.42.a-i}$$

$$a6_{ij} = \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j'' d\xi$$

$$a7_{ij} = \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j' d\xi$$

$$a^* 8_{ij} = N_i$$

$$a8_{ij} = \int_{-1}^1 Y_i Y_j' d\xi$$

$$\begin{aligned}
a9_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j d\xi \\
a10_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j d\xi \\
a11_{ij} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j'' d\xi \\
a12_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi^4 Y_i Y_j d\xi \\
a13_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi^3 Y_i Y_j''' d\xi \\
a14_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi^3 Y_i Y_j d\xi \\
a15_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i Y_j''' d\xi \\
a16_{ij} &= \int_{-1}^1 \xi Y_i Y_j'' d\xi \\
a17_{ij} &= \int_{-1}^1 Y_i Y_j''' d\xi
\end{aligned} \tag{B.42.i-r}$$

são calculadas analiticamente

Coefficientes “Unidimensionais”:

$$\begin{aligned}
FI_i = & FI1(x)FI1_i + FI2(x)FI2_i + FI3(x)FI3_i + FI4(x)FI4_i + \\
& FI5(x)FI5_i + FI6(x)FI6_i
\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}
FI1(x) &= fq^2 (W''' + 3W'W'' - 4W'^3); \\
FI2(x) &= fq^2 (S''' + 3W''S' + 4W'S'' - 8W'^2S'); \\
FI3(x) &= fq^2 (4S'S'' + 4pp' - 4W'S'^2 - 2W'W'' + 4W'^3 - 2W'''); \\
FI4(x) &= fq^2 (8W'^2S' - 4W'S'' - 4W''S' - 2S'''); \\
FI5(x) &= fq^2 (W''' - W'W'' - 4S'S'' - 4pp' + 4W'S'^2) \\
FI6(x) &= fq^2 (S''' - W''S')
\end{aligned} \tag{B.43.a-f}$$

$$FJ_i = FJ1(x)FJ1_i + FJ2(x)FJ2_i + FJ3(x)FJ3_i + FJ4(x)FJ4_i \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
FJ1(x) &= fq/p (W^{(iv)} + 8W'W'' + 6W'^3 + 12W'^2W''); \\
FJ2(x) &= fq/p (S^{(iv)} + 8W'S''' + 8W''S' + 12W''S'' + 24W'W''S' + 12W'^2S''); \\
FJ3(x) &= fq/p (W^{(iv)} - 8S'S'' - 6S''^2 - 12pp'' - 24pp'W' - 12W''S'^2 - 24WS'S''); \\
FJ4(x) &= fq/p (S^{(iv)} - 12S'^2S'' - 4p^2S'' - 16pp'S');
\end{aligned} \tag{B.45.a-d}$$

$$\begin{aligned}
FJ1_i &= FI3_i \\
FJ2_i &= FI4_i \\
FJ3_i &= FI3_i \\
FJ4_i &= FI4_i
\end{aligned} \tag{B.46.a-d}$$

onde:

$$\begin{aligned}
FI1_i &= \int_{-1}^1 \xi^5 Y_i d\xi \\
FI2_i &= \int_{-1}^1 \xi^4 Y_i d\xi \\
FI3_i &= \int_{-1}^1 \xi^3 Y_i d\xi \\
FI4_i &= \int_{-1}^1 \xi^2 Y_i d\xi \\
FI5_i &= \int_{-1}^1 \xi^1 Y_i d\xi \\
FI6_i &= \int_{-1}^1 Y_i d\xi
\end{aligned} \tag{B.47.a-f}$$

Para os coeficientes das condições de contorno:

$$CM_i = fq[CM1(x)CM1_i + CM2(x)CM2_i + CM3(x)CM3_i + CM4(x)CM4_i] \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned}
CM1(x) &= -\left(\frac{W'}{p}\right)_{out}; & CM2(x) &= -\left(\frac{S'}{p}\right)_{out}; \\
CM3(x) &= \left(\frac{W'}{p}\right)_{out}; & CM4(x) &= \left(\frac{S'}{p}\right)_{out}
\end{aligned} \tag{B.49.a-d}$$

$$\begin{aligned}
CM1_i &= FI3_i \\
CM2_i &= FI4_i \\
CM3_i &= FI5_i \\
CM4_i &= FI6_i
\end{aligned} \tag{B.50.a-d}$$

$$CN_i = CN1(x)CN1_i + CN2(x)CN2_i \tag{B.51}$$

$$CN1(x) = -CM1(x); \quad CN2(x) = -CM2(x) \tag{B.52.a,b}$$

$$\begin{aligned}
CM1_{ij} &= a7_{ij} \\
CM2_{ij} &= a9_{ij}
\end{aligned} \tag{B.53.a,b}$$

$$CO_i = fq[CO1(x)CO1_i + CO2(x)CO2_i + CO3(x)CO3_i + CO4(x)CO4_i] \tag{B.54}$$

$$\begin{aligned}
CO1(x) &= -\left[\left(W''' + 6W'W'' + 2W'^3\right)/p\right]_{out}; \\
CO2(x) &= -\left[\left(S''' + 6W'S'' + 6W''S' + 6W'^2S'\right)/p\right]_{out}; \\
CO3(x) &= \left[\left(W''' - 6S'S'' - 6W'S' - 6pp'\right)/p\right]_{out}; \\
CO4(x) &= \left[\left(S''' - 2S'^3 - 2p^2S'\right)/p\right]_{out};
\end{aligned} \tag{B.55.a-d}$$

$$\begin{aligned}
CO1_i &= FI3_i \\
CO2_i &= FI4_i \\
CO3_i &= FI5_i \\
CO4_i &= FI6_i
\end{aligned} \tag{B.56.a-d}$$

$$\begin{aligned}
CP_i &= CP1(x)CP1_i + CP2(x)CP2_i + CP3(x)CP3_i + CP4(x)CP4_i + CP5(x)CP5_i + \\
&\quad CP6(x)CP6_i + CP7(x)CP7_i + CP8(x)CP8_i + CP9(x)CP9_i
\end{aligned} \tag{B.57}$$

$$\begin{aligned}
CP1(x) &= \left(\frac{W'^3}{p}\right)_{out}; \quad CP2(x) = \left(\frac{3W'^2S'}{p}\right)_{out}; \quad CP3(x) = \left(\frac{3W'W''}{p}\right)_{out}; \\
CP4(x) &= \left(\frac{3W'S'^2 + pp'}{p}\right)_{out}; \quad CP5(x) = -\left(\frac{3W''S' + 3W'S''}{p}\right)_{out}; \\
CP6(x) &= \left(\frac{W'''}{p}\right)_{out}; \quad CP7(x) = \left(\frac{S'^3 + pS'}{p}\right)_{out}; \\
CP8(x) &= -\left(\frac{3S'S'' + 2p'}{p}\right)_{out}; \quad CP9(x) = \left(\frac{S'''}{p}\right)_{out};
\end{aligned} \tag{B.58.a-i}$$

$$\begin{aligned}
CP1_{ij} &= a13_{ij} \\
CP2_{ij} &= a15_{ij} \\
CP3_{ij} &= a4_{ij} \\
CP4_{ij} &= a16_{ij} \\
CP5_{ij} &= a6_{ij} \\
CP6_{ij} &= a7_{ij} \\
CP7_{ij} &= a17_{ij} \\
CP8_{ij} &= a11_{ij} \\
CP9_{ij} &= a9_{ij}
\end{aligned} \tag{B.60.a-i}$$

$$CQ_i = CQ1(x)CQ1_i + CQ2(x)CQ2_i + CQ3(x)CQ3_i + CQ4(x)CQ4_i + CQ5(x)CQ5_i \tag{B.61}$$

$$\begin{aligned}
CQ1(x) &= \left(\frac{3W'^2}{p}\right)_{out}; \quad CQ2(x) = \left(\frac{6W'S'}{p}\right)_{out}; \quad CQ3(x) = \left(\frac{3W''}{p}\right)_{out}; \\
CQ4(x) &= \left(\frac{3S'}{p} + p\right)_{out}; \quad CQ5(x) = -\left(\frac{3S''}{p}\right)_{out}
\end{aligned} \tag{B.62.a-e}$$

$$CQ1_{ij} = a4_{ij}$$

$$CQ2_{ij} = a6_{ij}$$

$$CQ3_{ij} = a7_{ij}$$

(B.63.a-e)

$$CQ4_{ij} = a11_{ij}$$

$$CQ5_{ij} = a9_{ij}$$

$$CR_i = (2CO_i)_{out}$$

(B.64)

ANEXO C

ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO ENTRE PLACAS PARALELAS

Considera-se um duto de placas paralelas, tal como o esquematizado na figura C1. Quando o escoamento torna-se completamente desenvolvido, a velocidade transversal é nula, e as equações de Navier-Stokes então se reduzem a:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \text{Re} \frac{dp}{dx} = K \quad (\text{C.1})$$

Com as condições de contorno:

$$u(-b) = 0 \quad ; \quad u(b) = 0 \quad (\text{C.2})$$

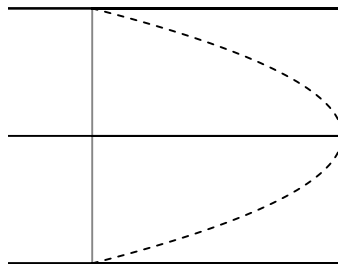


Figura C.1: Escoamento totalmente desenvolvido em um canal de placas planas

A solução de (C.1) fornece a componente longitudinal da velocidade no escoamento desenvolvido:

$$u = -\frac{Kb^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (\text{C.3})$$

Considerando que a vazão por unidade de comprimento no canal é Q:

$$Q = \int_{-b}^b u dy \quad (\text{C.4})$$

Integrando-se esta última expressão, resulta que:

$$-\frac{Kb^2}{2} = \frac{3Q}{4b} \quad (C.5)$$

Logo o perfil da componente de velocidade u pode ser expresso em função de Q :

$$u = \frac{3Q}{4b} \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (C.6)$$

Da definição de função corrente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (C.7)$$

Logo,

$$\int_{k_1}^{\psi} d\psi = \int_{-b}^y u dy \quad (C.8)$$

onde k_1 é um valor arbitrário de $\psi(-b)$.

Integrando-se a equação substituindo o perfil (C.6) em (C.7) e integrando-se, obtém-se:

$$\psi = \frac{3Q}{4} \left[\left(\frac{y}{b} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \quad (C.9)$$

O valor da função corrente na parede superior, isto é, em $y = b$, é dado por:

$$\psi(b) = Q + k_1 \quad (C.10)$$

ANEXO D

CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO BASEADO NAS FORÇAS VISCOSAS

Definindo:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho u_{av}^2} \quad (D.1)$$

multiplicando-se pelo número de Reynolds:

$$f Re = \frac{\tau_w}{\rho u_{av}^2} \frac{\rho u_{av} H}{\mu} = \frac{\tau_w H}{\mu u_{av}} \quad (D.2)$$

onde τ_w é a tensão na parede dada por:

$$\tau_w = -\frac{H}{u_{av}} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \Bigg|_{y=y_2} \quad (D.3)$$

Assim, já em termos adimensionais:

$$f Re = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Bigg|_{y=y_2} \quad (D.4)$$

ou em termos de função corrente:

$$f Re = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} \right) \Bigg|_{y=y_2} \quad (D.5)$$

Aplicando o filtro $\psi(x, y) = \phi(x, y) + F(x, y)$:

$$f Re = -\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Bigg|_{y=y_2} + \sum_{i=1}^{NTV} \left(\psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2} \Bigg|_{y=y_2} \right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Bigg|_{y=y_2} + \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{NTV} \left(\psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} \Bigg|_{y=y_2} + 2 \frac{d\psi_i}{dx} \frac{\partial Y_i}{\partial x} \Bigg|_{y=y_2} + Y_i \Bigg|_{y=y_2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \right) \right] \quad (D.6)$$

