



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**

**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA**

**JEAN JORGE GOMES DA SILVA**

**ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO TRANSIENTE EM  
CAVIDADES USANDO TRANSFORMADA INTEGRAL**

**BELÉM – PARÁ – BRASIL**

**2011**

**JEAN JORGE GOMES DA SILVA**

**ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO TRANSIENTE EM CAVIDADES  
USANDO TRANSFORMADA INTEGRAL**

**Dissertação apresentada ao Programa de Pós  
Graduação em Engenharia Química da  
Universidade Federal do Pará, como parte dos  
requisitos necessários para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Química.**

**ORIENTADORES:**

**Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma**

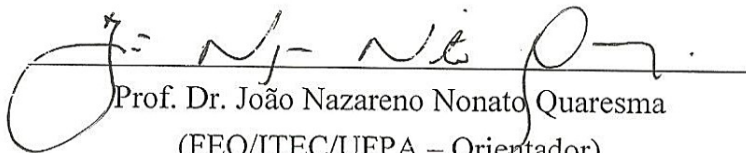
**Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo**

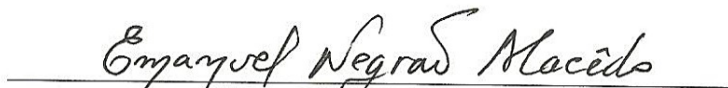
JEAN JORGE GOMES DA SILVA

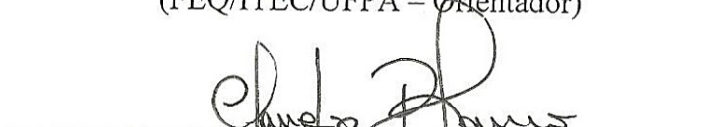
**ESCOAMENTO MAGNETOHIDRODINÂMICO TRANSIENTE EM CAVIDADES  
USANDO TRANSFORMADA INTEGRAL**


Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.


**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma  
(FEQ/ITEC/UFPA – Orientador)

  
Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo  
(FEQ/ITEC/UFPA – Orientador)

  
Prof. Dr. Cláudio José Cavalcante Blanco  
(FAESA/ITEC/UFPA – Membro)

  
Prof. Dr. Erb Ferreira Lins  
(FEM/ITEC/UFPA – Membro)

  
Dr. Carlos Frederico Trotta Matt  
(CEPEL/ELETROBRÁS – Membro)

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Biblioteca do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química**

---

Silva, Jean Jorge Gomes da

Escoamento magnetohidrodinâmico transiente em cavidades usando transformada integral / Jean Jorge Gomes da Silva; orientadores, João Nazareno Nonato Quaresma e Emanuel Negrão Macêdo.\_ Belém - 2011

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2011

1. Magnetohidrodinâmica 2 . Transformadas integrais 3. Mecânica dos fluidos I. Título

CDD 22.ed. 538.6

---

**Dedico este trabalho:**

**À Deus em primeiro lugar por me fortalecer nos momentos mais difíceis de minha vida, por me conceder saúde e aptidão ao conhecimento.**

**Aos meus pais, Jorge e Fátima, os maiores mestres que tive em minha vida e os responsáveis pelo que sou.**

**Aos meus irmãos, Antonio e Jamerson, minhas eternas fontes de inspiração e motivação, e por todo apoio.**

**Aos meus orientadores, Prof. João Nazareno e Prof. Emanuel Negrão, pela orientação irretocável, incentivo, confiança e amizade.**

**Aos meus avós maternos, a memória dos meus avós paternos e a toda minha família.**

**Aos meus afilhados Khalil, Gabriel, Maria e Ivete.**

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química (PPEQ) da Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao CNPq por todo suporte, inclusive financeiro durante todo mestrado.

Aos professores do PPEQ/UFPA pelos ensinamentos transmitidos.

Ao Sr. Ribamar, secretário do PPEQ/UFPA, pela atenção e boa vontade prestados durante o mestrado.

À todos os amigos do Laboratório de Simulação de Processos (LSP) Evaldiney, Clauderino, Carlos, Sil, Kleber, Nelson e Edilson, que se empenham em difundir e desenvolver a ciência no nosso estado, e também pela amizade e colaboração.

Ao meu grande amigo e irmão Wanderson Rodrigues, por tudo.

Aos professores Dr. Emanuel Negrão e Dr. João Nazareno por me ensinarem muito mais do que ciência.

Aos professores Dr. Erb Lins e Dr. Claudio Blanco pelas sugestões no trabalho final.

A todos que antes de mim de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento dos métodos de solução de problemas da física-matemática, sem os quais este trabalho jamais poderia ser realizado.

A toda minha família pela compreensão e companheirismo.

**MUITO OBRIGADO!**

**“Um homem equilibrado vive cada dia de sua vida pessoal como se fosse o último, e de sua vida profissional como se fosse o primeiro, e todos os dias de sua vida com DEUS, buscando livrar-se do paradoxo da vida moderna.”**

**O autor**

## RESUMO

O escoamento magnetohidrodinâmico (MHD) têm sido largamente estudado nas últimas décadas, em função principalmente do carácter fortemente não-linear e acoplado das equações que governam o problema físico e de suas aplicações industriais em reatores nucleares, solidificação de ligas metálicas, etc. A equação de Navier-Stokes, a equação da energia e as equações de Maxwell governam o problema da cavidade quadrada com campo magnético transversal constante, o que o tornou um problema clássico para validação dos mais diversos métodos de solução e estratégias de implementação. A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi utilizada para a solução do campo de velocidade formulado em termos de função corrente e campo de temperatura num sistema de coordenadas bidimensional com escoamento devido ao empuxo térmico. A aproximação de Boussinesq foi utilizada para a força de empuxo. Os casos analisados foram para números de Grashof  $10^4$  e  $10^6$ , todos com número de Prandtl igual a 0,71. O uso da GITT para solução dessa classe de problemas complexos como o caso da MHD tem sido promissor devido sua concepção híbrida analítico-numérica, o que proporciona se explorar ao máximo as informações do contorno na parte analítica da metodologia. A parte numérica da solução foi resolvida usando-se a subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL e os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com alguns disponíveis na literatura.

Palavras-chave: MHD, Navier-Stokes, Equações de Maxwell, GITT.



## ABSTRACT

The magnetohydrodynamic flow (MHD) has been widely studied in recent decades, due mainly to industrial applications in nuclear reactors, solidification, crystal growth, electrolytic cells for aluminium reductions, etc.. The character and strongly nonlinear coupled equations governing the physical problem, the Navier-Stokes equations, the energy equation and Maxwell's equations become the problem of square cavity with constant transverse magnetic field in a classic problem for validation of several solution methods and implementation strategies. The Generalized Integral Transform Technique (GITT) was used to solve the velocity field streamfunction-only formulation and temperature field in a coordinate system with two-dimensional flow due to thermal buoyancy, the Boussinesq approximation was used to buoyancy force, the cases were analyzed for Grashof numbers  $10^4$  and  $10^6$ , all with Prandtl number 0.71. The use of the GITT solution for this class of complex problems like the case of MHD has been promising because its hybrid analytical-numerical design. The numerical part of the solution was solved using the IMSL subroutine library DIVPAG and the results obtained in this study are compared with some available in the literature.

Keywords: MHD, Navier-Stokes, Maxwell Equations, GITT.

## LISTA DE FIGURAS

### CAPITULO 2

Figura 2.1 – (a) Cavidade de Seção Quadrada – Escoamento MHD. (b) Balanço de força em uma partícula fluida, componentes verticais da Força de empuxo térmico ( $F_E$ ) e Força de Lorentz ( $F_L$ ).

### CAPITULO 3

- Figura 3.1.a – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^3$ , em diferentes tempos.
- Figura 3.1.b – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $v$ ) ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^3$ , em diferentes tempos.
- Figura 3.1.c – Comparação da distribuição do número Nusselt local, para  $Ra = 10^3$ , ao longo da parede quente da cavidade ( $x = 0$ ) em diferentes tempos.
- Figura 3.2.a – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^5$ , em diferentes tempos.
- Figura 3.2.b – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $v$ ) ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^5$ , em diferentes tempos.
- Figura 3.2.c – Comparação da distribuição do número Nusselt local, para  $Ra = 10^5$ , ao longo da parede quente da cavidade ( $x = 0$ ) em diferentes tempos.
- Figura 3.3.a – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.3.b – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.4. – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (a)  $Ha = 0$ ; (b)  $Ha = 15$ ; (c)  $Ha = 25$ ; (d)  $Ha = 50$ .
- Figura 3.5.a – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$  e vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.5.b – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .

- Figura 3.6 – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (a)  $Ha = 0$ ; (b)  $Ha = 15$ ; (c)  $Ha = 25$ ; (d)  $Ha = 50$ .
- Figura 3.7.a – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.7.b – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.8. – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (a)  $Ha = 0$ ; (b)  $Ha = 25$ ; (c)  $Ha = 50$ ; (d)  $Ha = 100$ .
- Figura 3.9.a – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.9.b – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$  em vários tempos. (a)  $t = 0,005$ ; (b)  $t = 0,02$ ; (c)  $t = 0,1$ ; (d)  $t = 0,93$ .
- Figura 3.10 – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (a)  $Ha = 0$ ; (b)  $Ha = 25$ ; (c)  $Ha = 50$ ; (d)  $Ha = 100$ .
- Figura 3.11.a – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $u$ ) ao longo do plano vertical mediano da cavidade ( $x = 1/2$ ), para  $Gr = 10^4$  em regime permanente.
- Figura 3.11.b – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Gr = 10^4$  em regime permanente.
- Figura 3.12.a – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $u$ ) ao longo do plano vertical mediano da cavidade ( $x = 1/2$ ), para  $Gr = 10^6$  em regime permanente.
- Figura 3.12.b – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Gr = 10^6$  em regime permanente.
- Figura 3.13 – Variação do número de Nusselt médio global com o tempo, para  $Gr = 10^4$  e vários números de Hartmann.
- Figura 3.14 – Variação do número de Nusselt médio global com o tempo, para  $Gr = 10^6$  e vários números de Hartmann.

## LISTA DE TABELAS

- Tabela 3.1a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$ .
- Tabela 3.1b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$ .
- Tabela 3.2a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$ .
- Tabela 3.2b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$ .
- Tabela 3.3a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$ .
- Tabela 3.3b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$ .
- Tabela 3.4a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$ .
- Tabela 3.4b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$ .
- Tabela 3.5a – Comparação dos resultados obtidos via GITT com soluções anteriores, para  $Gr = 10^4$  em estado permanente.
- Tabela 3.5b – Comparação dos resultados obtidos via GITT com soluções anteriores, para  $Gr = 10^6$  em estado permanente.

## NOMENCLATURA

### - Letras Latinas

$g$	Vetor aceleração da gravidade.
$g_0$	Componente vertical do vetor aceleração da gravidade.
$X_i, Y_\ell$	Autofunção (função corrente), eqs. (2.13.a-b).
$\tilde{X}_i, \tilde{Y}_\ell$	Autofunção normalizada (função corrente), eqs. (2.17.a-b).
$V$	Vetor velocidade.
$B_0$	Campo magnético constante aplicado externamente.
$B$	Vetor campo magnético.
$u$	Componente de velocidade na direção x.
$v$	Componente de velocidade na direção y.
$L$	Comprimento e altura da cavidade.
$\tilde{f}_{i\ell}$	Condição inicial transformada.
$x, y$	Coordenas espaciais adimensionais.
$J$	Vetor densidade de corrente elétrica.
$F_L$	Vetor Força de Lorentz.
$E$	Potencial elétrico
$M_x, M_y$	Integral de normalização, eqs. (2.15.a-b).
$N_x, N_y$	Integral de normalização, eqs. (2.24.a-b).
$Gr$	Número de Grashof.
$Ha$	Número de Hartmann.
$Nu$	Número de Nusselt.
$Pr$	Número de Prandlt.
$Ra$	Número de Rayleigh.
$NV$	Ordem de truncamento para as expansões do campo de função corrente.
$NT$	Ordem de truncamento para as expansões do campo de temperatura.
$P$	Pressão.
$T$	Temperatura adimensional.
$T_h$	Temperatura da parede fria.
$T_c$	Temperatura da parede quente.
$T_0$	Temperatura de referencia.
$t$	Tempo, adimensional.

## - Letras Gregas

$\alpha_{i,\ell}$	Autovalor, eq. (2.14.a).
$\beta_{i,\ell}$	Autovalor, eqs. (2.23.a-b).
$\phi_i, \Gamma_\ell$	Autofunção (temperatura), eqs. (2.22.a-b).
$\tilde{\phi}_i, \tilde{\Gamma}_\ell$	Autofunção normalizada (temperatura), eqs. (2.26.a-b).
$\tilde{\psi}_{i\ell}$	Campo transformado da função corrente, eq. (2.27.a).
$\tilde{\theta}_{i\ell}$	Campo transformado de temperatura, eq. (2.28.a)
$\beta_T$	Coefficiente de expansão térmica do fluido.
$\sigma$	Condutividade elétrica do fluido.
$\rho$	Massa específica do fluido.
$\alpha_T$	Difusividade térmica do fluido.
$\psi$	Função corrente adimensional.
$\mu_0$	Permeabilidade magnética no vácuo.
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido.
$\delta$	Delta de Kronecker.

## - Subscritos

*	Variáveis dimensionais
i, j, k, $\ell$ , m, n	Índices relativos à ordem dos autovalores

## - Símbolos Matemáticos

$\nabla^2$	Laplaciano
$\nabla^4$	Operador biharmônico
$\sum$	Somatório

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 OBJETIVOS .....	2
1.1.1 OBJETIVO GERAL .....	2
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	3
1.2 SÍNTESE DO TRABALHO .....	3
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	4
1.3.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA (MHD) .....	4
1.3.2 REVISÃO NA LITERATURA .....	7
1.4 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT) .....	9
<b>CAPÍTULO 2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	11
2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO .....	11
2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA .....	12
2.3 – METODOLOGIA DA GITT NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	15
2.3.1 DETERMINAÇÃO DOS PROBLEMAS AUXILIARES .....	16
2.3.2 DETERMINAÇÃO DOS PARES TRANSFORMADA-INVERSA .....	21
2.3.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EDP's .....	22
2.3.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL .....	24
2.3.5 REORDENAMENTO E SELEÇÃO DE AUTOVALORES .....	28
<b>CAPÍTULO 3 - RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	30
3.1 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA .....	30
3.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA .....	34
3.3 ISOLINHAS DE FUNÇÃO CORRENTE E TEMPERATURA .....	45

3.4 PERFIL DE VELOCIDADE .....	60
3.5 NÚMERO DE NUSSELT .....	63
<b>CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>66</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>68</b>
<b>APÊNDICE .....</b>	<b>73</b>



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas vários métodos têm sido utilizados para a solução do escoamento magnetohidrodinâmico (MHD) em cavidades, no intuito principal de validar os métodos na solução acoplada dos fenômenos de transferência de calor, quantidade de movimento e eletromagnetismo. As equações que governam este problema são: a equação da continuidade, equação de Navier-Stokes, equação da energia e as equações de Maxwell. A complexidade destas equações, por seu caráter fortemente não linear e acoplado, as coloca entre as equações da física-matemática mais difíceis de serem resolvidas pelas técnicas disponíveis. No intuito de se avaliar, se tais métodos eram capazes de resolver o sistema de equações acoplado, com eficiência e precisão desejada, o estudo da convecção natural com campo magnético transversal no interior de uma cavidade quadrada tornou-se um problema clássico para testes e comparação entre diferentes métodos de solução e estratégias de implementação (RAMASWANY et al., 1992; SAI et al., 1994; BARAKOS et al., 1994; VAHL DAVIS, 1983; COLAÇO et al., 2009). Não pelo seu interesse prático direto em inúmeras aplicações de engenharia, mas num primeiro momento, até a segunda grande guerra, o intuito era simplesmente a validação desses métodos de solução.

Após a segunda grande guerra, a vertente se voltou às aplicações industriais, que podem ser encontradas em diversas áreas da engenharia como reatores nucleares, equipamentos de refrigeração, equipamentos eletrônicos, coletores solares, solidificação de ligas metálicas, cubas eletrolíticas e crescimento de cristais. Em todas estas aplicações a convecção natural pode ser controlada com a aplicação de campo magnético externo no intuito de amortecê-la, controlando desta forma a qualidade e eficiência dos produtos e processos.

Oreper e Szekely (1983) foram os primeiros a propor solução numérica para estudar o efeito do campo magnético sobre a convecção natural em cavidades quadradas. Utilizando o método das Diferenças Finitas para obtenção da distribuição da temperatura e velocidade em termos de função corrente para o estado transiente. Recentemente Colaço, Dulikravich e

Orlande (2009), obtiveram resultados, utilizando Funções de Base Radial (RBF's) para solucionar o sistema de equações acopladas para o caso clássico em estado permanente.

O uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para solução desta classe de problemas têm sido cada vez mais recorrente, devido sua concepção híbrida analítico-numérica. A GITT tem vantagens de manter um controle sobre o erro relativo dos resultados, o qual é estabelecido a priori pelo usuário e controlado automaticamente pelo código, proporcionando a solução absorver o máximo de informações do contorno (LEAL et al., 2000; LEAL et al., 1999; LEAL et al., 1998). Guerrero e Cotta (1992) usaram a GITT para solucionar o campo de velocidade em termos de função corrente e o campo de temperatura para o problema da convecção natural em cavidade quadrada.

Desde o trabalho de Oreper e Szekely (1983) foram tratados uma ampla gama de aplicações utilizando diversos métodos de soluções, mas para o caso clássico da cavidade quadrada com campo magnético transversal, constante, este trabalho é pioneiro e trata-se de uma extensão da aplicação da GITT para escoamentos MHD.

## **1.1 OBJETIVOS**

### **1.1.1 OBJETIVO GERAL**

O programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará (PPEQ/UFPA) encontra-se inserido em um estado com grandes potenciais de utilização dos seus recursos naturais. No entanto, o desenvolvimento da indústria local encontra-se atrelado ao seu desenvolvimento tecnológico, que ainda é lento devido ao baixo investimento em pesquisas. Esses fatores desestimulam o desenvolvimento industrial e a produção no estado, fazendo com que o estado ainda figure como exportador de matéria-prima no cenário nacional e internacional. Este trabalho está inserido nesse contexto como um pequeno passo no sentido de se conhecer melhor a MHD, fenômeno que domina vários de nossos processos produtivos, como no caso de aplicação direta na produção de alumínio (cubas eletrolíticas e solidificação de ligas metálicas), e poder em trabalhos futuros desenvolvidos no PEPEQ/UFPA, otimizar a utilização de nossos recursos naturais e energéticos produzindo materiais com alto padrão de qualidade e racionalizando o uso de matérias-primas e energia.

Para isto, este trabalho propõe em uma primeira etapa a solução para o problema proposto usando a GITT, utilizando-se uma formulação em termos de função corrente para o campo de velocidade em regime transiente. Numa segunda etapa, explorando então a formulação, propõe-se estudar numericamente o comportamento ao longo do tempo de escoamento e de transferência de calor dentro da cavidade, o sistema de EDO's resultante será resolvido utilizando a rotina DIVPAG disponível em IMSL Library (1989).

### 1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Nesse intuito, o presente trabalho tem o objetivo específico:

- Estudar o escoamento MHD em cavidades;
- Examinar a influência do campo magnético no processo de transferência de calor e quantidade de movimento no interior da cavidade em regime transiente para moderados e altos números de Grashof;
- Contribuir com a metodologia da GITT, estendendo sua aplicação nessa classe de problemas que envolvam eletromagnetismo.

## 1.2 SÍNTESE DO TRABALHO

O Capítulo 1 traz uma introdução e destacando os objetivos do presente trabalho. São feitos também comentários sobre várias aplicações em engenharia do MHD, assim como seu desenvolvimento histórico, uma breve revisão sobre GITT e as principais contribuições na literatura que trataram o escoamento MHD (o caso da cavidade quadrada com campo magnético transversal) destacando-se os métodos utilizados para solução do problema.

O Capítulo 2 é voltado à formulação matemática do escoamento MHD em cavidade quadrada e a metodologia de solução utilizada neste trabalho.

A análise e discussão dos resultados são mostradas no Capítulo 3, ilustrando-se taxas de convergência obtidas, mostrando-se a visualização gráfica dos resultados e comparando-se com resultados disponíveis em literatura.

Finalmente, o Capítulo 4 apresenta as conclusões referentes a este trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

## **1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **1.3.1 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA (MHD)**

Uma breve passagem pela maneira como o estudo da MHD foi desenvolvido é interessante, pois fornece uma compreensão sobre os fenômenos básicos envolvidos.

Faraday (1832) e seus contemporâneos sabiam que o material sólido ou líquido em movimento num campo magnético sofre a ação de uma força eletromotriz se o material é eletricamente condutor. Alternativamente, as correntes podem ser induzidas pela mudança do campo magnético com o tempo. Existem dois efeitos básicos como consequências:

(I) Um campo magnético induzido aparece associado com esta corrente, perturbando o campo magnético original.

(II) Uma força eletromagnética, devido à interação das correntes e dos campos aparece, perturbando o movimento original.

Estes são os dois efeitos básicos da MHD, a ciência do movimento de fluidos condutores de eletricidade em campos magnéticos. A situação é essencialmente a de interação mútua entre o campo de velocidade do fluido e o campo eletromagnético, o movimento do fluido afeta o campo magnético e o campo magnético afeta o movimento do fluido. O nome de MHD surgiu como tentativa de sugerir essa relação entre os dois campos da física. Outros nomes, como hidromagnetismo, são usados mas não ganharam grande destaque.

Outra característica importante da MHD é a capacidade da força eletromagnética ser às vezes pseudo-viscosa e dissipativa, e outras vezes pseudo-elástica e conservativa, de uma maneira que dependa de alguma expressão adimensional do grau de condutividade.

Os efeitos (I) e (II) eram conhecidos por Faraday (1832) e seus contemporâneos (DAVY, 1821; RITCHIE, 1832). Na verdade a MHD, com baixa utilização de recursos

tecnológicos, se desenvolveu no final do século XIX, e em essência é inteiramente pré-Maxweliana. No entanto, a MHD é geralmente considerada, como um assunto muito moderno.

Os pioneiros da eletricidade no ano de 1830 (FARADEY, 1832; DAVY, 1821; RITCHIE, 1832) sugeriram que a MHD poderia explicar alguns fenômenos naturais. Faraday (1832) imaginava que o movimento do mar poderia explicar as variações observadas no campo magnético da terra, uma idéia que recentemente ganhou fôlego entre os geofísicos. Ritchie especulou que o movimento dos oceanos poderia ter origem na força eletromagnética do campo terrestre. Por outro lado se desconhecia a origem das correntes elétricas. Mas, a aplicação destas idéias para explicar os fenômenos naturais perdurou durante todo o resto do século. O assunto não progrediu muito nos laboratórios, principalmente porque os mais óbvios experimentos eram feitos com fluídos, como mercúrio ou eletrólitos, que não são bons condutores de eletricidade. No entanto, vários artefatos pequenos foram desenvolvidos com os princípios da MHD. Um exemplo é o megnetómetro de Leduc (LEDUC, 1887).

Ritchie (1832) fez um experimento para bombear água eletromagneticamente, mas até o século XX esse dispositivo óbvio da MHD, a bomba eletromagnética, não se desenvolveu de forma concreta.

A aplicação da MHD recebeu um estímulo tardio, quando astrofísicos perceberam que seus efeitos prevaleciam em eventos naturais em todo universo, como exemplo gases ionizados (plasmas) com campos magnéticos significativamente fortes. Mais tarde a existência de campo magnético no Sol foi confirmada. A conclusão final foi que os fenômenos da MHD dominam a maioria das áreas da astrofísica. Enquanto isso engenheiros trabalhando isoladamente levaram o assunto a avançar um pouco mais. A primeira proposta para o inverso da bomba eletromagnética, o gerador MHD usando gás ionizado como armadura, parece ter sido proposto por Petersen (1919).

No período entre guerras, os astrofísicos Cowling (1934) e Ferraro (1937), exploraram a teoria formal da MHD e suas implicações, enquanto outros cientistas e engenheiros, como Williams (1930) e Hartmann (1927) realizaram experimentos simples sobre o escoamento de líquidos condutores de eletricidade em laboratório.

Finalmente, em 1942, o engenheiro e astrofísico Alfvén (1942) publicou o clássico artigo que marca o surgimento da MHD em pleno direito. Na verdade, o termo

“magnetohidrodinâmica” em si foi introduzido por Alfvén (1942) neste trabalho. Em consequência os últimos efeitos da MHD foram claramente entendidos e expressos: “se um fluido condutor se move em um campo magnético, as correntes induzidas tenderão, em algum sentido, em inibir o movimento relativo do fluido e o campo de velocidade do fluido modifica por sua vez o campo magnético”.

O movimento relativo é inibido, em parte, pelo efeito (I), o campo magnético é deformado para acompanhar o movimento do fluido, e em parte pelo efeito (II), o movimento é oposto por forças eletromagnéticas, que Alfvén (1942) definiu em termos das tensões de Faraday nas linhas de campo. A idéia que agora é mais aceita é conhecida como uma onda Alfvén. As linhas do campo magnético sob tensão aparente e com a inércia do fluido, vão sofrer oscilações transversais e transmitir ondas como cordas de uma harpa. Isto é confirmado pela análise matemática. Alfvén (1942) começou a aplicar suas idéias em problemas cósmicos e em especulações sobre MHD em astrofísica. Na astrofísica a MHD é importante porque os eventos ocorrem em grande escala de condutividade e campos magnéticos. Por outro lado, a escala de trabalho limitada em laboratório, explica em parte o desenvolvimento lento da MHD.

Durante o pós-guerra, todas as ciências aplicadas sofreram grande desenvolvimento e com a MHD não foi diferente. O bombeamento eletromagnético de líquidos refrigerantes de metais líquidos em reatores nucleares tornou-se uma prática comum em MHD. Agitação e convecção (para evitar a contaminação) foram explorados na indústria metalúrgica. A constatação de que a fusão termonuclear controlada só poderia acontecer pela restrição do Deutério quente ionizado longe de todas as paredes por forças eletromagnéticas. Todas as vertentes levaram a uma intensificação na pesquisa da MHD e tópicos relacionados da física do plasma, que difere da MHD em reconhecer que o gás ionizado não é um fluido, e sim um meio com vários tipos de partículas.

A necessidade de foguetes de alto impulso para vôo interplanetário foi um incentivo para explorar a possibilidade de utilizar o bombeamento eletromagnético para acelerar os gases propelentes. Uma aplicação relacionada é o uso de aceleração MHD para disparar plasma em dispositivos de fusão ou para a produção de túneis de vento de alta energia para simulação de vôo supersônico. Os objetos que se deslocam em alta velocidade são precedidos por uma onda de choque que pode ionizar o ar.

O que o futuro reserva à MHD? Pode ser que muitas aplicações continuem a serem descobertas, mas um grande fator limita a âmbito da aplicação da MHD em tecnologias. Este fator é a condutividade elétrica de líquidos e plasmas muito menor que a do cobre, que atualmente domina a eletrotécnica, para não mencionar as novas ligas supercondutoras que prometem muito. Assim, para um dispositivo MHD valer a pena, ele deve explorar a capacidade de um fluido fazer coisas que um sólido não pode fazer. Como por exemplo, na bomba eletromagnética ou no reator de fusão, onde o líquido é fundamental. Este texto foi adaptado. Para uma leitura mais completa consultar Shercliff (1965).

### 1.3.2 REVISÃO NA LITERATURA

Até os anos 40, o estudo de convecção natural em cavidades fechadas não era objeto de interesse por parte da comunidade científica por ser considerado um tema de pouca importância prática. Somente após a Segunda Grande Guerra começaram a surgir os primeiros trabalhos sobre MHD (SHERCLIFF, 1953; HUNT, 1965). Os efeitos de convecção natural em ambientes totalmente fechados foram estudados nos anos seguintes por Newell e Schmidt (1970). Desde então um número crescente de publicações foram direcionadas a transferência de calor e massa em cavidades quadradas (VAHL DAVIS, 1983; MARKATOS e PERICLEOUS, 1984; SAITOH e HIROSE, 1989; HORTMANN et al., 1990; BARAKOS et al., 1994; AL-NAJEM et al., 1997; KHANAFER e EL-REFAEE, 1998).

Dentro desse contexto, será dada ênfase nessa revisão a estudos mais recentes que envolvam escoamentos MHD em cavidades fechadas, tanto em regime permanente como em regime transiente.

Os primeiros a fazer a modelagem teórica da cavidade com campo magnético foram Oreper e Szekely (1983). Eles descobriram que o campo magnético pode suprimir a convecção natural e que a força do campo magnético é um dos fatores mais importantes durante a formação de cristais.

Ozoe e Maruo (1987) investigaram numericamente a convecção natural de um fluido condutor de eletricidade na presença de campo magnético com baixo número de Prandtl. Os números de Nusselt obtidos foram correlacionados em termos dos números de Rayleigh, Prandtl e Hartmann.

Tridimensionalidade e o efeito da direção magnética foram examinados por Ozoe e Okada (1989). Neste trabalho, os autores verificaram que a melhor supressão das correntes de convecção ocorreram quando o campo magnético externo é paralelo à direção do fluxo de calor.

Vasseur et al (1995) estudaram analiticamente, bem como numericamente, o efeito do campo magnético transversal em uma cavidade bidimensional inclinada com empuxo direcionado (ou seja, a relação de aspecto  $AR = 4$ ). Neste trabalho, os autores conseguiram uma boa concordância com o fluxo dimensional paralelo, solução desenvolvida por Cormack, Leal, e Imberger (1974).

Alchaar et al (1995a) investigaram o efeito do arrasto magnético nas correntes de convecção em uma cavidade rasa aquecida diferentemente nas paredes verticas. Um esquema padrão de diferenças finitas foi usado para prever as soluções numa ampla gama de Número de Rayleigh ( $10^2 < Ra < 10^5$ ), número de Hartmann ( $0 < Ha < 100$ ) e número de Prandtl ( $0,005 < Pr < 1$ ). Os resultados foram comparados também com uma solução de forma fechada obtidos por Garandet et al (1992).

Rudraiah et al (1995) utilizaram um esquema de diferenças finitas, “Alternating Direction Implicit” (ADI), para solucionar a formulação em termos de função corrente-vorticidade na convecção natural dentro de uma cavidade retangular com a presença de um campo magnético. As duas paredes verticais laterais são mantidas isotermicamente a temperaturas  $T_C$  e  $T_H$ , enquanto as paredes superior e inferior são adiabáticas. Previsões numéricas são obtidas para uma ampla variedade dos números de Grashof e de Hartmann, com número de Prandtl,  $Pr = 0,733$ . Convecção dominante com estratificação térmica vertical na região central está previsto para altos números de Grashof e baixos números de Hartmann. Os resultados numéricos mostraram que do campo magnético suprime a taxa de transferência de calor convectiva.

Alchaar et al (1995b) estudaram numericamente a convecção natural em duas dimensões numa cavidade rasa aquecida por baixo, na presença do campo magnético inclinado com razão de aspecto igual a 6, para  $1,8 \times 10^3 < Ra < 3 \times 10^4$ ;  $0 < Ha < 35$ ; e  $0,005 < Pr < 1,000$ . Os resultados numéricos mostraram que o efeito do campo magnético reduz a transferência de calor e inibe o aparecimento da corrente de convecção. Além disso, os modos de convecção encontrados no interior da cavidade dependem fortemente da orientação do campo magnético. O campo magnético horizontal parece ser o mais eficaz na supressão do fluxo convectivo.

Garandet et al (1992) estudaram a influência de campos magnéticos transversais na força de empuxo em uma cavidade rasa com convecção orientada em duas dimensões, onde as



paredes verticais laterais estão aquecidas isotermicamente. Os perfis de velocidade e temperatura no núcleo da cavidade foram previstos analiticamente e baseados em uma aproximação para um escoamento unidimensional paralelo. A parte de circulação do fluxo perto das paredes verticais da cavidade foi examinado por meio de uma expansão em série.

Al-Najem et al (1998) propuseram um estudo numérico para a convecção natural laminar em uma cavidade fechada com campo magnético transversal, neste trabalho os autores examinaram a influência do campo magnético no processo de transferência de calor dentro da cavidade, para vários ângulos de inclinação na cavidade e moderados e altos números de Grashof. Para isso, solucionaram numericamente as equações que governam o problema formulando um modelo bidimensional para vorticidade, função corrente e temperatura.

Recentemente, Colaço et al (2009), utilizaram funções de base radial (RBF's) para interpolar os campos de função corrente e temperatura num escoamento bidimensional causado pelo empuxo térmico e permeado por um campo magnético constante aplicado externamente. Os autores consideram promissor o uso de RBF's para solução dessa classe de problemas complexos da MHD, reduzindo significativamente o tempo computacional.

#### **1.4 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)**

Com trabalho de Özisik e Murray (1974), sobre a solução de problemas difusivos com condições de contorno variáveis, surgiu um novo método para o tratamento de problemas a priori não-transformáveis pela técnica clássica de transformação integral (ÖZISIK, 1984).

A aplicação da GITT pode ser resumida nos seguintes passos:

- (i) Obtenção do problema auxiliar associado, com base num problema homogêneo que inclua os termos difusivos da formulação original.
- (ii) Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores e normas.
- (iii) Desenvolvimento do par transformada-inversa.
- (iv) Transformação integral do problema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário acoplado.
- (v) Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução numérica do sistema

resultante, para obtenção dos campos transformados com precisão prescrita.

(vi) Obtenção do potencial original, fazendo-se uso da fórmula analítica de inversão.

A idéia básica na técnica generalizada é relaxar a necessidade de encontrar-se uma transformação integral exata, ou seja, que resulte em um sistema diferencial transformado em forma desacoplada. Assim pode-se escolher um problema auxiliar de autovalor que seja característico do problema original, desenvolver o par transformada-inversa associado e efetuar a transformação integral do sistema de diferencial parcial, chegando-se a um sistema diferencial ordinário infinito e acoplado. Após truncamento em ordem suficientemente grande para a precisão requerida, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente, por algoritmos bem estabelecidos, com controle automático de erro, disponíveis em bibliotecas de subrotinas científicas (PRESS et al., 1992). A fórmula explícita de inversão fornece então uma representação analítica nas demais variáveis independentes eliminadas pela transformação integral. Desta forma, a tarefa numérica por este método, ocorrerá sempre em uma única variável independente, com representação analítica do potencial desejado nas demais variáveis do problema.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA

#### 2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA FÍSICO

O problema abordado neste trabalho é definido ao considerar-se uma cavidade quadrada de lado “L”, cujas paredes horizontais estão isoladas, as paredes verticais estão a temperaturas prescritas e uniformes  $T_h$  e  $T_c$ , as componentes de velocidades são nulas no contorno, o movimento no interior da cavidade (convecção natural) é provocado pela força de empuxo, um campo magnético transversal e constante submete a convecção natural à uma força de corpo externa, conhecida como Força de Lorentz, inicialmente os campos de velocidade são nulos e a temperatura é  $T_c$ , em todos os pontos do domínio de solução exceto na parede vertical esquerda, tal como é mostrado na figura (2.1), abaixo.

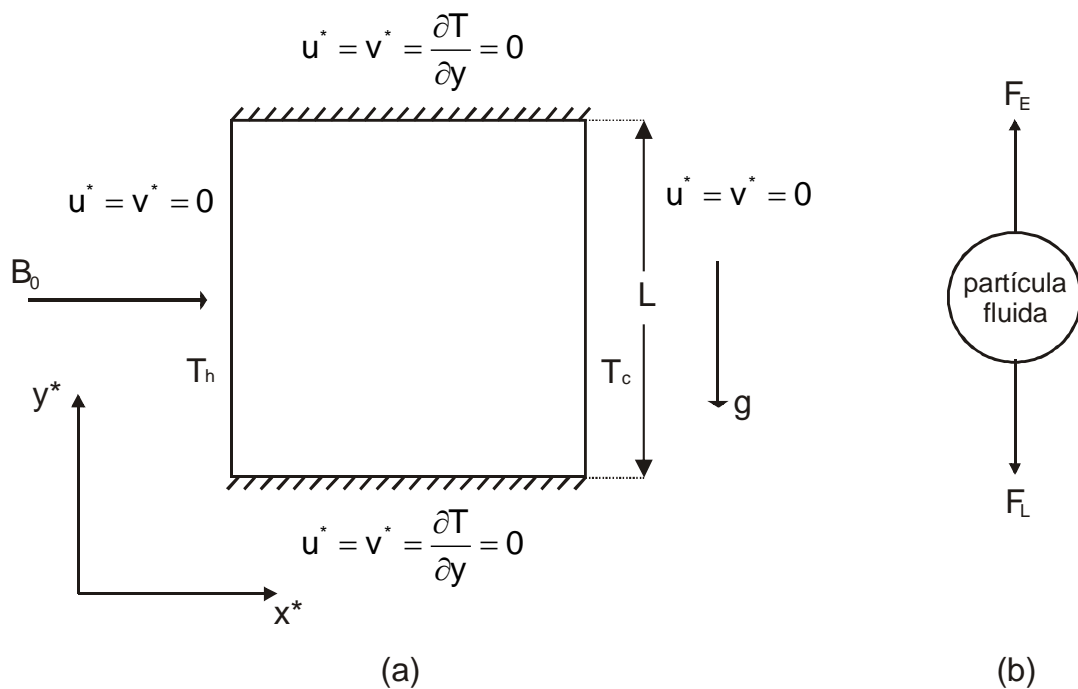


Figura 2.1 – (a) Cavidade de Seção Quadrada – escoamento MHD. (b) Balanço de força em uma partícula fluida, Força de empuxo térmico ( $F_E$ ) e Força de Lorentz ( $F_L$ ).

O problema físico é formulado fazendo-se as seguintes hipóteses:

- Propriedades do fluido constantes, a exceção da massa específica no termo de empuxo de acordo com a formulação de Boussinesq;
- Escoamento bidimensional incompressível em regime laminar e transiente;
- Impermeabilidade no contorno;
- Fluido Newtoniano com condutividade elétrica diferente de zero;
- O fluido é permeado por um campo magnético constante e transversal;
- Os efeitos de dissipação viscosa e o efeito Joule são desprezados.

## 2.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

As equações que governam o problema são a equação da conservação da massa, da quantidade de movimento, da energia, da conservação da carga elétrica, a Lei de Ohm's e a Lei de Ampere-Maxwell's acopladas, isto é, o campo de velocidade depende da interação com campo magnético e da distribuição de temperatura, que por sua vez, são influenciados pelo campo de velocidades. O problema é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.1.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t^*} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \beta_T g (T^* - T_0) + \frac{\mathbf{J}}{\rho} \times \mathbf{B} \quad (2.1.b)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T^* = \alpha_T \nabla^2 T^* + \frac{\mathbf{J}}{\rho C_p} \cdot (-\nabla E + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.1.d)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (-\nabla E + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.1.e)$$

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} \quad (2.1.f)$$

as condições de contorno originais do problema são:

$$u^* = v^* = 0; \quad T^*(x, y, 0) = T_c \quad \text{em } t^* = 0 \quad (2.2.a-c)$$

$$u^* = v^* = 0; \quad T^* = T_h \quad \text{em } x^* = 0 \quad (2.2.d-f)$$

$$u^* = v^* = 0; \quad T^* = T_c \quad \text{em } x^* = L \quad (2.2.g-i)$$

$$u^* = v^* = \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y^* = 0 \quad (2.2.j-m)$$

$$u^* = v^* = \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y^* = L \quad (2.2.n-q)$$

A manipulação algébrica, assim como a adimensionalização passo a passo do problema pode ser encontrada no apêndice deste trabalho, na seção A.1.

Na equação da Lei de Ohm's (2.1.e), que é uma equação constitutiva, “E” representa o potencial elétrico e  $-\nabla E$  o campo elétrico associado a este potencial, a discussão feita por Garandet et al (1992), é que a equação harmônica para o potencial elétrico,  $\nabla E = 0$ , é válida para um fluido nas vizinhanças de um meio sólido. Assim, a única solução da equação harmônica é  $\nabla E = 0$ , pois há sempre um contorno isolado em que  $\partial E / \partial n = 0$ , em torno da cavidade. Daí resulta que o campo elétrico desaparece em todos os pontos. Também é possível mostrar, através da combinação de (2.1.d) e (2.1.f), que para um escoamento bidimensional, a equação da conservação das cargas é automaticamente satisfeita.

Admitindo a aproximação de Boussinesq (GRAY e GIORGINI, 1976) para força de empuxo e adotando a formulação em termos de função corrente (GUERRERO e COTTA, 1992), o problema adimensionalizado é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) = \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} + \text{Pr} \nabla^4 \psi - \text{Pr} \text{Ha}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \text{Ra Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, y)} + \nabla^2 T \quad (2.3.b)$$

Os operadores associados são dados no apêndice deste trabalho, seção A.1.

As condições de contorno adimensionais são dadas por:

$$T(x, y, 0) = \psi(x, y, 0) = 0 \quad \text{em } t = 0 \quad (2.4.a-c)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0; \quad T = 1 \quad \text{em } x = 0 \quad (2.4.d-f)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = T = 0 \quad \text{em } x = 1 \quad (2.4.g-i)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (2.4.j-m)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 1 \quad (2.4.n-q)$$

A função corrente é representada a partir do campo de velocidades através das definições:

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}, \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (2.5.a-b)$$

Os grupos adimensionais foram definidos a partir de:

$$x = \frac{x^*}{L}; \quad y = \frac{y^*}{L}; \quad \psi = \frac{\psi^*}{\alpha_T}; \quad t = \frac{\alpha_T t^*}{L^2}; \quad T = \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c} \quad (2.5.c-g)$$

onde “\*” identifica as variáveis dimensionais, L é o comprimento da cavidade quadrada, T<sub>h</sub> e

$T_c$  são a temperatura quente e fria, das paredes horizontais, respectivamente. Os números de Hartmann, Rayleigh, Prandtl e Grashof são definidos respectivamente por:

$$Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \quad (2.6.a)$$

$$Ra = \frac{g_0 \beta_T (T_h - T_c) L^3}{\alpha_T \nu} \quad (2.6.b)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_T} \quad (2.6.c)$$

$$Gr = \frac{g_0 \beta_T (T_h - T_c) L^3}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr} \quad (2.6.d)$$

Desta forma o problema de escoamento MHD em cavidade quadrada fica formulado apenas em termos de função corrente e temperatura.

### 2.3 METODOLOGIA DA GITT NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A idéia da aplicação da transformação integral ao problema consiste em se integrar cada Equação Diferencial Parcial (EDP) original nas duas direções coordenadas para se obter um sistema de Equações Diferencial Ordinário (EDO's) no tempo. Este sistema de EDO's, é então resolvido, através de subrotinas disponíveis em bibliotecas matemáticas bem estabelecidas, com controle automático do erro.

A transformação integral das EDP's é possível ao se considerar que a função corrente e a temperatura podem ser expressas como expansões em autofunções, as quais são obtidas de problemas auxiliares associados respectivamente às equações (2.3.a) e (2.3.b), com a finalidade de explorar suas propriedades de ortogonalidade.

O primeiro passo neste método é, portanto, definir os problemas auxiliares que permitirão encontrar estas autofunções.

### 2.3.1 DETERMINAÇÃO DOS PROBLEMAS AUXILIARES

Com o propósito de fazer coincidir as condições de contorno das direções escolhidas no problema principal a serem eliminadas através da transformação integral, direção “x” e “y”, com as condições de contorno do problema de autovalor a ser proposto, deve-se homogeneizar a condição de contorno (2.4.f). Nesse sentido, a primeira etapa no processo de solução é a estratégia de filtragem para reforçar a convergência (LEAL et al., 2000), marcando as condições de contorno homogêneas. A opção mais simples da solução de filtragem para o campo de temperatura é:

$$T(x, y, t) = \theta(x, y, t) + T_F(x) \quad (2.7.a)$$

onde o filtro  $T_F(x)$  é a solução do problema de condução pura na cavidade, sem a presença do escoamento, previamente escrito como:

$$T_F(x) = 1 - x \quad (2.7.b)$$

Um filtro mais refinado poderia ser proposto, como por exemplo, considerando a versão transiente do problema de condução na cavidade. No entanto, o filtro proposto é suficiente para as necessidades e propósitos do presente trabalho.

Substituindo (2.7.a) em (2.3.a-b) e em (2.4.a-q), obtém-se um novo problema para a temperatura, agora em função de  $\theta(x, y, t)$  e com condições de contorno homogêneas. O sistema final é então escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} + \text{Pr} \nabla^4 \psi - \text{Pr} \text{Ha}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \text{Ra} \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \text{Ra} \text{Pr} \quad (2.8.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \nabla^2 \theta \quad (2.8.b)$$



As condições de contorno e inicial agora homogêneas podem ser reescritas como:

$$\psi(x, y, 0) = 0, \quad \theta(x, y, 0) = x - 1; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (2.9.a-b)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \theta = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \quad (2.9.c-e)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \theta = 0 \quad \text{em} \quad x = 1 \quad (2.9.f-h)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad (2.9.i-l)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad \text{em} \quad y = 1 \quad (2.9.m-o)$$

Logo, no que diz respeito à temperatura, o problema encontra-se reformulado para a solução do potencial separado  $\theta(x, y, t)$ .

Como a transformação integral eliminará as duas direções coordenadas, a próxima etapa é a escolha das autofunções em cada direção, “x” e “y”, para cada potencial individual,  $\psi$  e  $\theta$ . Como desenvolvido anteriormente por Pérez-Guerrero (1995) e Leal (1996), para a função corrente é proposto um problema de autovalor do tipo bi-harmônico, já empregado na solução das equações de Navier-Stokes via GITT (COTTA, 1993; LEAL et al., 2000; LEAL et al., 1999; LEAL e COTTA, 1998; ÖZISIK, 1984):

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} = \alpha_i^4 X_i; \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10.a)$$

e

$$\frac{d^4 Y_\ell}{dy^4} = \alpha_\ell^4 Y_\ell; \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10.b)$$

com condições de contorno:

$$X_i(0) = \frac{dX_i(0)}{dx} = 0; \quad \text{em } x = 0 \quad (2.11.a-b)$$

$$X_i(1) = \frac{dX_i(1)}{dx} = 0; \quad \text{em } x = 1 \quad (2.11.c-d)$$

e

$$Y_\ell(0) = \frac{dY_\ell(0)}{dy} = 0; \quad \text{em } y = 0 \quad (2.11.c-f)$$

$$Y_\ell(1) = \frac{dY_\ell(1)}{dy} = 0; \quad \text{em } y = 1 \quad (2.11.g-h)$$

onde  $X_i(x)$ ,  $Y_\ell(y)$  e  $\alpha_i, \alpha_\ell$  são as autofunções e autovalores, respectivamente, que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade;

$$\int_0^1 X_i X_j dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_{X_i}, & i = j \end{cases} \quad (2.12.a)$$

$$\int_0^1 Y_\ell Y_m dy = \begin{cases} 0, & \ell \neq m \\ M_{Y_\ell}, & \ell = m \end{cases} \quad (2.12.b)$$

onde  $M_{X_i}$  e  $M_{Y_\ell}$  é a norma ou integral de normalização.

As equações (2.10.a-b) podem ser resolvidas analiticamente e as soluções são dadas por:

$$X_i(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\alpha_i(x-1/2)]}{\cos(\alpha_i/2)} - \frac{\cosh[\alpha_i(x-1/2)]}{\cosh(\alpha_i/2)}; & \text{para } i = 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{\text{sen}[\alpha_i(x-1/2)]}{\text{sen}(\alpha_i/2)} - \frac{\text{senh}[\alpha_i(x-1/2)]}{\text{senh}(\alpha_i/2)}; & \text{para } i = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases} \quad (2.13.a-b)$$

e

$$Y_\ell(y) = \begin{cases} \frac{\cos[\alpha_\ell(y-1/2)]}{\cos(\alpha_\ell/2)} - \frac{\cosh[\alpha_\ell(y-1/2)]}{\cosh(\alpha_\ell/2)}; & \text{para } \ell = 1, 3, 5, 7, \dots \\ \frac{\text{sen}[\alpha_\ell(y-1/2)]}{\text{sen}(\alpha_\ell/2)} - \frac{\text{senh}[\alpha_\ell(y-1/2)]}{\text{senh}(\alpha_\ell/2)}; & \text{para } \ell = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases} \quad (2.13.c-d)$$

onde os autovalores  $\alpha_i$  (ou  $\alpha_\ell$ ) são os mesmos em ambas as direções “x” e “y”, e obtidos a partir das seguintes equações transcendentais:

$$\tan g(\alpha_{i,\ell}) = \begin{cases} -\tan g h(\alpha_{i,\ell}/2); & \text{para } i, \ell = 1, 3, 5, 7, \dots \\ \tan g h(\alpha_{i,\ell}/2); & \text{para } i, \ell = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases} \quad (2.14.a-b)$$

e a norma definida como:

$$Mx_i = \int_0^1 X_i^2 dx; \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.15.a)$$

e

$$My_\ell = \int_0^1 Y_\ell^2 dy; \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.15.b)$$

Apresenta o seguinte valor numérico:

$$Mx_i = My_\ell = 1; \quad \text{para } i, \ell = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.16.a-b)$$

Para os próximos passos no uso da GITT é conveniente normalizar as autofunções  $X_i$  e  $Y_\ell$  a partir de:

$$\tilde{X}_i(x) = \frac{X_i(x)}{Mx_i^{1/2}}; \quad \tilde{Y}_\ell(y) = \frac{Y_\ell(y)}{My_\ell^{1/2}} \quad (2.17.a-b)$$

onde  $\tilde{X}_i(x)$  e  $\tilde{Y}_\ell(y)$  representa a autofunção normalizada, que no caso específico da cavidade quadrada com escoamento MHD coincide com a autofunção original:

$$\tilde{X}_i(x) = X_i(x); \quad \tilde{Y}_\ell(y) = Y_\ell(y) \quad (2.18.a-b)$$

Para o campo de temperatura o problema auxiliar está associado ao clássico operador difusivo de segunda ordem, que da origem a um problema tipo Sturm-Liouville definido

como:

$$\frac{d^2\phi_i}{dx^2} + \beta_i^2\phi_i = 0 \quad (2.19.a)$$

e

$$\frac{d^2\Gamma_\ell}{dy^2} + \beta_\ell^2\Gamma_\ell = 0 \quad (2.19.b)$$

com condições de contorno:

$$\phi_i(0) = 0; \quad \text{em } x = 0 \quad (2.20.a)$$

$$\phi_i(1) = 0; \quad \text{em } x = 1 \quad (2.20.b)$$

e

$$\frac{d\Gamma_\ell(0)}{dy} = 0; \quad \text{em } y = 0 \quad (2.20.c)$$

$$\frac{d\Gamma_\ell(1)}{dy} = 0; \quad \text{em } y = 1 \quad (2.20.d)$$

onde  $\phi_i$ ,  $\Gamma_\ell$  e  $\beta_{i,\ell}$  são respectivamente, as autofunções e autovalores que satisfazem a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \phi_i\phi_j dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_{x_i}, & j = i \end{cases} \quad (2.21.a-b)$$

e

$$\int_0^1 \Gamma_\ell\Gamma_m dy = \begin{cases} 0, & \ell \neq m \\ N_{y_\ell}, & \ell = m \end{cases} \quad (2.21.c-d)$$

onde  $N_{x_i}$  e  $N_{y_\ell}$  é a norma ou integral de normalização.

As equações (2.19.a-b) podem ser resolvidas analiticamente e suas soluções encontram-se em Özisik (1984), desta forma:

$$\phi_i(x) = \text{sen}(\beta_i x) \quad (2.22.a)$$

e

$$\Gamma_\ell(y) = \text{cos}(\beta_\ell y) \quad (2.22.b)$$

onde os autovalores são dados por:

$$\beta_i = i\pi; \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.23.a)$$

$$\beta_\ell = (\ell - 1)\pi; \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.23.b)$$

A norma definida como:

$$N_{x_i} = \int_0^1 \phi_i^2 dx; \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.24.a)$$

e

$$N_{y_\ell} = \int_0^1 \Gamma_\ell^2 dy; \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.24.b)$$

Apresenta o seguinte valor numérico:

$$N_{x_i} = 1/2; \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.25.a)$$

$$N_{y_\ell} = \begin{cases} 1, & \ell = 1 \\ 1/2, & \ell > 1 \end{cases} \quad (2.25.b-c)$$

As autofunções normalizadas  $\tilde{\phi}_i(x)$  e  $\tilde{\Gamma}_\ell(y)$  ficam então na forma:

$$\tilde{\phi}_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{N_{x_i}^{1/2}}; \quad \tilde{\Gamma}_\ell(y) = \frac{\Gamma_\ell(y)}{N_{y_\ell}^{1/2}} \quad (2.26.a-b)$$

### 2.3.2 DETERMINAÇÃO DOS PARES TRANSFORMADA-INVERSA

Como proposto inicialmente, o uso da GITT baseia-se na idéia de que o potencial pode ser representado como uma expansão, que tem como base autofunções provenientes de um

problema auxiliar associado ao problema original. Partindo dessa proposição, obtém-se a dupla transformação para o campo de função corrente e temperatura, nas direções “x” e “y”, a partir dos pares transformada-integral abaixo:

Para o campo de função corrente têm-se:

$$\tilde{\psi}_{i\ell}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \psi(x, y, t) dy dx \quad \text{transformada} \quad (2.27.a)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \quad \text{inversa} \quad (2.27.b)$$

Para o campo de temperatura, e sempre considerando-se o potencial separado  $\theta(x, y, t)$ , o par transformada-inversa é representado por:

$$\tilde{\theta}_{i\ell}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \theta(x, y, t) dy dx \quad \text{transformada} \quad (2.28.a)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\theta}_{i\ell}(t) \quad \text{inversa} \quad (2.28.b)$$

### 2.3.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO SISTEMA DE EDP's

Seguindo o formalismo da GITT, faz-se uso do operador  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) dy dx$  para aplicar a dupla transformação em (2.8.a), problema do campo de função corrente, resultando em um sistema infinito e acoplado de EDO's abaixo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij\ell m} \frac{d\tilde{\psi}_{jm}}{dt} = & \Pr(\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4) \tilde{\psi}_{jm} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2 \Pr B_{ij\ell m} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{ijk\ell mn} - D_{ijk\ell mn}) \tilde{\psi}_{kn} + \right. \\ & \left. - \Pr Ha^2 \ddot{E}_{ij\ell m} \right] \tilde{\psi}_{jm} - \Pr Ra \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{i\ell m} \tilde{\phi}_{ij} - G_{i\ell} \right] \end{aligned} \quad (2.29.a)$$

onde os coeficientes, obtidos analiticamente através de pacotes de manipulação simbólica (WOLFRAM, 2005), são definidos pelas integrais:

$$A_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2 \tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \delta_{\ell m} + \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d^2 \tilde{Y}_m}{dy^2} dy \right) \delta_{ij} \quad (2.29.b)$$

$$B_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d\tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy^2} dy \right) \quad (2.29.c)$$

$$C_{ijk\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d\tilde{X}_j}{dx} \frac{d^2\tilde{X}_k}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m \frac{d\tilde{Y}_n}{dy} dy \right) + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d\tilde{X}_j}{dx} \tilde{X}_k dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m \frac{d^3\tilde{Y}_n}{dy^3} dy \right) \quad (2.29.d)$$

$$D_{ijk\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j \frac{d^3\tilde{X}_k}{dx^3} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy} \tilde{Y}_n dy \right) + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j \frac{d\tilde{X}_k}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy} \frac{d^3\tilde{Y}_n}{dy^3} dy \right) \quad (2.29.e)$$

$$\ddot{E}_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2\tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m dy \right) = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2\tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \delta_{\ell m} \quad (2.29.f)$$

$$F_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\phi}_j dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{\Gamma}_m dy \right) \quad (2.29.g)$$

$$G_{i\ell} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell dy \right) \quad (2.29.h)$$

De maneira similar, faz-se uso do operador  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy dx$  para aplicar a dupla transformação em (2.8.b), problema do campo de temperatura, resultando também em um sistema infinito e acoplado de EDO's abaixo:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{i\ell}}{dt} = -(\beta_i^2 + \beta_\ell^2) \tilde{\theta}_{i\ell} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (H_{ijk\ell mn} - I_{ijk\ell mn}) \tilde{\theta}_{kn} + J_{ij\ell m} \right] \tilde{\psi}_{jm} \quad (2.30.a)$$

onde os coeficientes, também obtidos analiticamente através de pacotes de manipulação simbólica (WOLFRAM, 2005), são definidos pelas integrais:

$$H_{ik\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_i \frac{d\tilde{X}_j}{dx} \tilde{\phi}_k dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{\Gamma}_m \frac{d\tilde{\Gamma}_n}{dy} dy \right) \quad (2.30.b)$$

$$\mathbf{I}_{ijk\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\phi}_j \frac{d\tilde{\phi}_k}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy} \tilde{\Gamma}_n dy \right) \quad (2.30.c)$$

$$\mathbf{J}_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_i \tilde{X}_j dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy} dy \right) \quad (2.30.d)$$

As condições iniciais são obtidas através da transformação integral das equações (2.9.a-b),

$$\tilde{\psi}_{i\ell}(0) = 0; \quad \tilde{\theta}_{i\ell}(0) = \tilde{f}_{i\ell} \quad (2.31.a-b)$$

onde:

$$\tilde{f}_{i\ell} = \left[ \int_0^1 (x-1) \tilde{\phi}_i dx \right] \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell dy \right); \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}; \quad \delta_{\ell m} = \begin{cases} 0, & \ell \neq m \\ 1, & \ell = m \end{cases} \quad (2.31.c-e)$$

A transformação integral passo a passo do sistema de EDP's pode ser consultada no apêndice deste trabalho, seção A.2.

Desta forma o problema diferencial parcial original foi transformado num sistema infinito de EDO's acopladas, constituindo um problema de valor inicial, de primeira ordem e não lineares.

### 2.3.4 ALGORITIMO COMPUTACIONAL

Para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas e infinitas, e do ponto de vista computacional, o sistema deve ser truncado em uma ordem finita, suficientemente grande que permita obter soluções convergidas para uma determinada precisão desejada.

Antes de programar a versão truncada do sistema para solucionar o problema de valor inicial, o sistema de equações (2.29.a) e (2.30.a) é reescrito de forma a contar as contribuições mais importantes de forma ordenada. O esquema de ordenação para expansão de autofunções multidimensionais é descrito em maiores detalhes em (LEAL, 1996; MIKHAILOV e COTTA, 1996; COTTA e MIKHAILOV, 1997), e tem como objetivo reduzir os custos



computacionais. Aqui, os critérios para o procedimento de ordenação envolvem a soma dos autovalores em cada sentido, ou:

$$\alpha_1^4 + \alpha_\ell^4 = \alpha_p^4; \quad \beta_1^2 + \beta_\ell^2 = \beta_p^2 \quad (2.32.a-b)$$

Em seguida, os índices relacionados à expansão da função corrente e temperatura são reorganizados em um único índice. Assim:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \rightarrow \sum_p; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \rightarrow \sum_q; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \sum_r \quad (2.33.a-c)$$

O sistema (2.29.a-h) e (2.30.a-d) é reescrito como:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \frac{d\bar{\psi}_q}{dt} = \text{Pr} \alpha_p^4 \bar{\psi}_p + \sum_{q=1}^{\infty} \left[ 2\text{Pr} B_{pq} + \sum_{r=1}^{\infty} (C_{pqr} - D_{pqr}) \bar{\psi}_r - \text{Pr Ha}^2 \ddot{E}_{pq} \right] \bar{\psi}_q - \\ + \text{Pr Ra} \left[ \sum_{q=1}^{\infty} F_{pq} \bar{\phi}_q - G_p \right] \end{aligned} \quad (2.34.a)$$

$$A_{pq} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2 \tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \delta_{\ell m} + \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d^2 \tilde{Y}_m}{dy^2} dy \right) \delta_{ij} \quad (2.34.b)$$

$$B_{pq} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d \tilde{X}_j}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d \tilde{Y}_m}{dy} dy \right) \quad (2.34.c)$$

$$\begin{aligned} C_{pqr} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d \tilde{X}_j}{dx} \frac{d^2 \tilde{X}_k}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m \frac{d \tilde{Y}_n}{dy} dy \right) + \\ + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d \tilde{X}_j}{dx} \tilde{X}_k dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m \frac{d^3 \tilde{Y}_n}{dy^3} dy \right) \end{aligned} \quad (2.34.d)$$

$$\begin{aligned} D_{pqr} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j \frac{d^3 \tilde{X}_k}{dx^3} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d \tilde{Y}_m}{dy} \tilde{Y}_n dy \right) + \\ + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j \frac{d \tilde{X}_k}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \frac{d \tilde{Y}_m}{dy} \frac{d^3 \tilde{Y}_n}{dy^3} dy \right) \end{aligned} \quad (2.34.e)$$

$$\ddot{E}_{pq} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2 \tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{Y}_m dy \right) = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d^2 \tilde{X}_j}{dx^2} dx \right) \delta_{\ell m} \quad (2.34.f)$$

$$F_{pq} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\phi}_j dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{\Gamma}_m dy \right) \quad (2.34.g)$$

$$G_p = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell dy \right) \quad (2.34.h)$$

e

$$\frac{d\bar{\theta}_p}{dt} = -\beta_p^2 \bar{\theta}_p + \sum_{q=1}^{\infty} \left[ \sum_{r=1}^{\infty} (H_{pqr} - I_{pqr}) \bar{\theta}_r + J_{pq} \right] \bar{\psi}_q \quad (2.35.a)$$

$$H_{pqr} = \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_i \frac{d\tilde{X}_j}{dx} \tilde{\phi}_k dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell \tilde{\Gamma}_m \frac{d\tilde{\Gamma}_n}{dy} dy \right) \quad (2.35.b)$$

$$I_{pqr} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\phi}_j \frac{d\tilde{\phi}_k}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell \frac{d\tilde{\Gamma}_m}{dy} \tilde{\Gamma}_n dy \right) \quad (2.35.c)$$

$$J_{pq} = \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_i \tilde{X}_j dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell \frac{d\tilde{Y}_m}{dy} dy \right) \quad (2.35.d)$$

com condições iniciais:

$$\tilde{\psi}_p(0) = 0; \quad \tilde{\theta}_p(0) = \tilde{f}_p \quad (2.36.a-b)$$

O sistema de equações (2.34.a) e (2.35.a) agora estão no formato para a solução numérica. As expansões são então, truncadas em NV e NT termos para os campos de função corrente e temperatura, respectivamente, onde as ordens de truncamento são automaticamente selecionadas ao longo da integração, de modo a atingir a precisão desejada.

A solução numérica, com controle automático de erro, é obtida através da subrotina DIVPAG, disponível na biblioteca do IMSL (1989), esta subrotina é empregada na solução de problemas de valor inicial, de forma que o sistema deve ser reescrito da seguinte forma:

$$A\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (2.37.a)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (2.37.b)$$

ou após a inversão dos coeficientes da matrix:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \quad (2.37.c)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (2.37.d)$$

onde:

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (2.39.e)$$

A inversão da matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ , foi obtido fazendo-se uso da subrotina DLINRG, disponível na biblioteca IMSL (1989). Esta subrotina calcula o inverso de uma matriz real utilizando a fatoração LU da matriz dos coeficientes.

O vetor solução  $\mathbf{y}$  é dado por:

$$\mathbf{y} = \left\{ \tilde{\psi}_1(t), \dots, \tilde{\psi}_{NV}(t), \tilde{\theta}_1(t), \dots, \tilde{\theta}_{NT}(t) \right\}^T \quad (2.37.f)$$

O sistema (2.37.a) é composto por  $NV + NT$  EDO's, que tendem a ter altas relações de rigidez. No entanto, o método de Gear's implementado na subrotina DIVPAG é capaz de lidar com esta rigidez oferecendo um esquema de controle automático de precisão.

Uma vez obtidos os campos transformados  $\tilde{\psi}_p$  e  $\tilde{\theta}_p$ , os potenciais originais de função corrente e temperatura, para este último considerando-se o filtro (2.7.b), são calculados pelas fórmulas de inversão (2.27.b) e (2.28.b), respectivamente.

Quantidades de interesse prático são facilmente obtidas a partir das fórmulas de inversão analítica na definição de função corrente, como os componentes do vetor velocidade.

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{NV} \sum_{\ell=1}^{NV} \tilde{X}_i(\mathbf{x}) \frac{d\tilde{Y}_\ell(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \quad (2.38.a)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{NV} \sum_{\ell=1}^{NV} \frac{d\tilde{X}_i(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \tilde{Y}_\ell(\mathbf{y}) \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \quad (2.38.b)$$

Há algumas diferentes definições de números de Nusselt tradicionalmente citados em literatura e frequentemente utilizados para efeitos de comparação de resultados numéricos da convecção natural em cavidades. Por exemplo, o número de Nusselt máximo (ou mínimo) na parede quente ( $x = 0$ ), definido a partir de:

$$\text{Nu}_M = - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.39.a)$$

pode ser calculado analiticamente, levando-se em consideração o filtro (2.7.b), ao se substituir a fórmula da inversa (2.28.b), resultando em:

$$\text{Nu}_M = 1 - \sum_{p=1}^{NT} d \left. \frac{\tilde{\phi}_p}{dx} \right|_{x=0} \tilde{\Gamma}_r(y) \tilde{\theta}_p(t) \quad (2.39.b)$$

O número de Nusselt médio local para o plano vertical no meio da cavidade ( $x = 1/2$ ) e para a parede quente ( $x = 0$ ),  $\text{Nu}_x$ , é definido da seguinte forma (COTTA, 1993):

$$\text{Nu}_x = \int_0^1 \left[ u(x, y, t) T(x, y, t) - \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right] dy, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.39.c)$$

Finalmente, define-se o número de Nusselt médio global através da cavidade, dado por:

$$\bar{\text{Nu}} = \int_0^1 \text{Nu}_x dx \quad (2.39.d)$$

Os valores numéricos de Nusselt definidos nas equações (2.39.c-d) são calculados com o auxílio das fórmulas de inversão (2.27.b) e (2.28.b). A inversão passo a passo pode ser encontrada no apêndice deste trabalho, seção A.3.

### 2.3.5 REORDENAMENTO E SELEÇÃO DE AUTOVALORES

O critério de reordenamento para problemas de difusão ou difusão-convecção, que envolvem soluções fundamentais por expansão em autofunções, proposto por Corrêa et al (1997), seja pelo método de separação de variáveis ou por transformações integrais. Segue a idéia de que a solução inicialmente deve conter o máximo de informações possíveis do problema original, ou seja, da equação diferencial do problema, de forma que esta ideia é estendida ao método da GITT, com objetivo de reduzir os custos computacionais.

No caso de um problema de condução bidimensional em domínio fixo, o critério de reordenamento tem base na proporcionalidade da solução do problema transformado aos

autovalores associados, de tal forma que o reordenamento dos autovalores a um único índice é explicitado por  $\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4 = \alpha_p^4$  e  $\beta_i^2 + \beta_\ell^2 = \beta_p^2$ , onde  $\alpha_\ell^4$  e  $\beta_p^2$  são os respectivos autovalores nas duas direções do problema para função corrente e o campo de temperatura.

Seguindo a ilustração apresentada por Mikhailov e Cotta (1996), em que se descrevem as regras de reordenamento para casos típicos dos problemas anteriores, ou seja, a solução é proporcional a  $\text{Exp}[-(\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4)]$  e  $\text{Exp}[-(\beta_i^2 + \beta_\ell^2)]$ . Para o problema bidimensional, o critério de seleção é feito coletando os máximos valores da relação  $(\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4)$  e  $(\beta_i^2 + \beta_\ell^2)$ , em seguida, lista-se  $\{i, \ell, \alpha_i^4 + \alpha_\ell^4\}$  e  $\{i, \ell, \beta_i^2 + \beta_\ell^2\}$  usando a plataforma de computação simbólica, o sistema *Mathematica* (WOLFRAM, 2005).

## CAPÍTULO 3

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um código em linguagem Fortran 90/95 foi desenvolvido e implementado em um microcomputador PENTIUM Dual Core 2.80 GHz do Laboratório de Simulação de Processos (LSP/UFPA). Foram estudados os casos para números de Grashof  $10^4$  e  $10^6$ , Hartmann variando de  $0 < Ha < 100$ , sempre para uma cavidade quadrada (razão de aspecto igual a 1) preenchida com fluido newtoniano, número de Prandtl igual a 0,71.

Para a solução do sistema diferencial ordinário utilizou-se a subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) com erro relativo global prescrito de  $10^{-10}$ . Esta subrotina é apropriada para a solução de problemas de valor inicial com característica de rigidez, como é o caso do sistema diferencial ordinário encontrado no presente trabalho. O tempo de CPU para os casos estudados ficaram compreendidos na faixa de 5 e 39 horas.

Os coeficientes analíticos surgidos no problema e representados pelas equações (2.36.b-h), (2.37.b-d) e (2.31.c) foram avaliados com o auxílio do software de manipulação simbólica *Mathematica* (WOLFRAM, 2005).

#### 3.1 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

Apresenta-se, agora, uma análise para verificar a solução obtida no presente trabalho por comparações com resultados disponíveis na literatura. Dessa forma, analisam-se os resultados referentes ao caso especial com número  $Ha = 0$ , ou seja, com ausência do campo magnético. Este caso especial, para o nosso trabalho, torna-se o problema abordado por Leal (1996), que utilizou GITT para solucionar o campo de velocidade e temperatura em cavidades com convecção natural.

Para garantir a exatidão e verificação da solução proposta neste trabalho, analisaram-

se os resultados para número de Rayleigh  $10^3$  e  $10^5$ , e em vários tempos. A componente de velocidade vertical e temperatura adimensionais foram comparadas com os resultados obtidos por Leal (1996). As Figuras (3.1.a-b) e (3.2.a-b) mostram uma excelente concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os valores apresentados na literatura (LEAL, 1996).

Além disso, foi feita também uma comparação com o número de Nusselt local ao longo da parede quente para vários tempos, Figuras (3.1.c) e (3.2.c). Como mostrado nas Figuras (3.1.a-c) e (3.2.a-c), a solução proposta no presente trabalho, é capaz de reproduzir resultados anteriores disponíveis em literatura, portanto a solução é capaz de prever os resultados pretendidos neste trabalho.

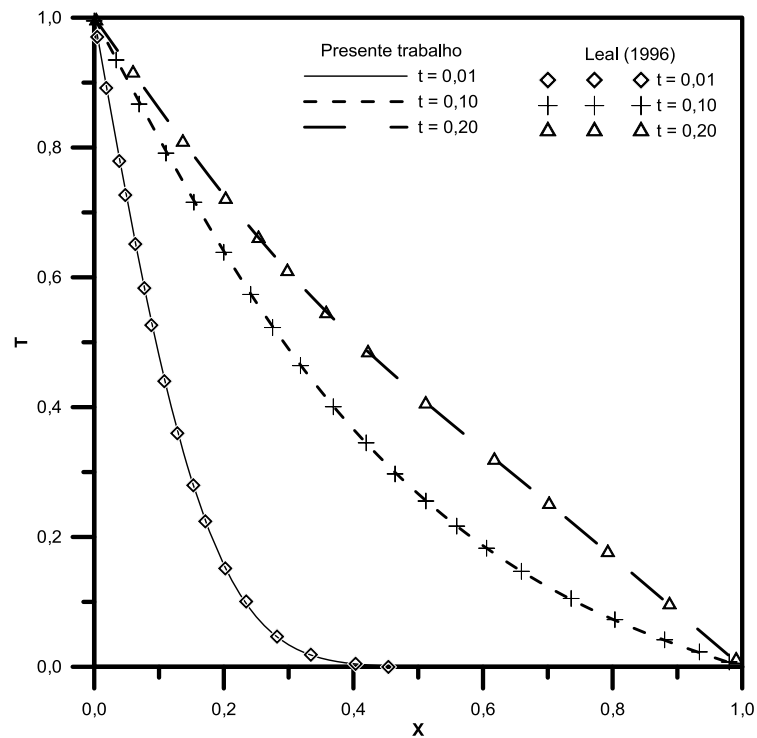


Figura 3.1.a – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^3$ , em diferentes tempos.

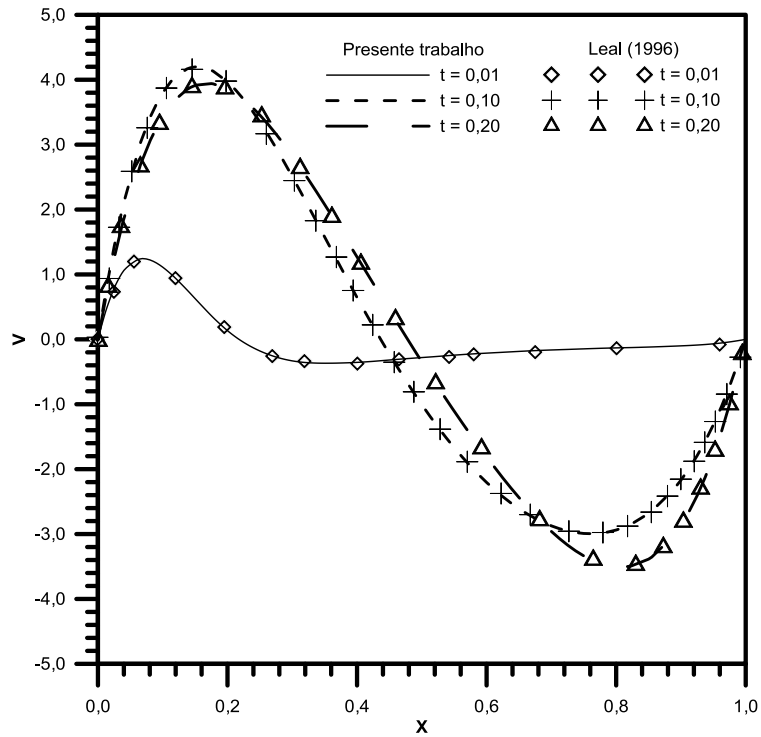


Figura 3.1.b – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $v$ ) ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^3$ , em diferentes tempos.

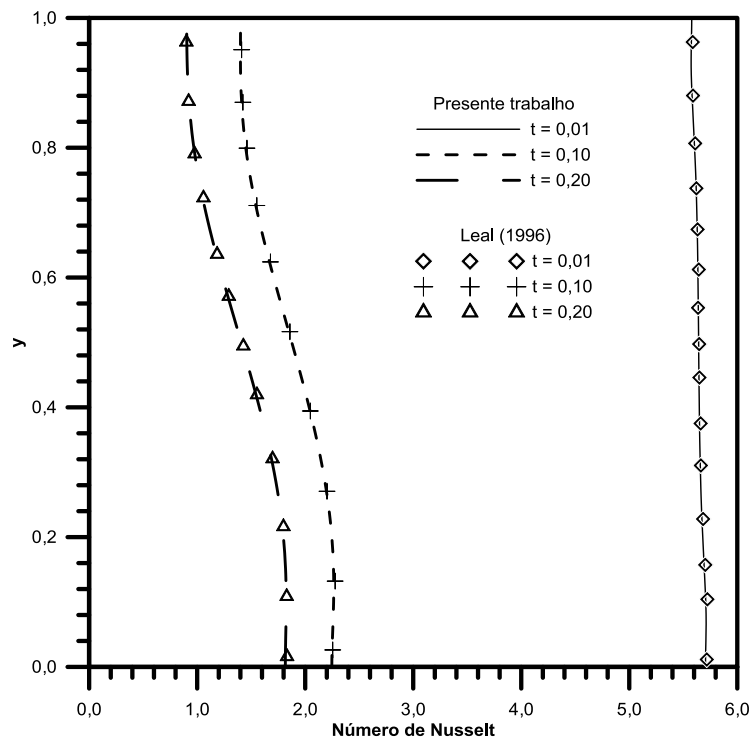


Figura 3.1.c – Comparação da distribuição do número Nusselt local, para  $Ra = 10^3$ , ao longo da parede quente da cavidade ( $x = 0$ ) em diferentes tempos.



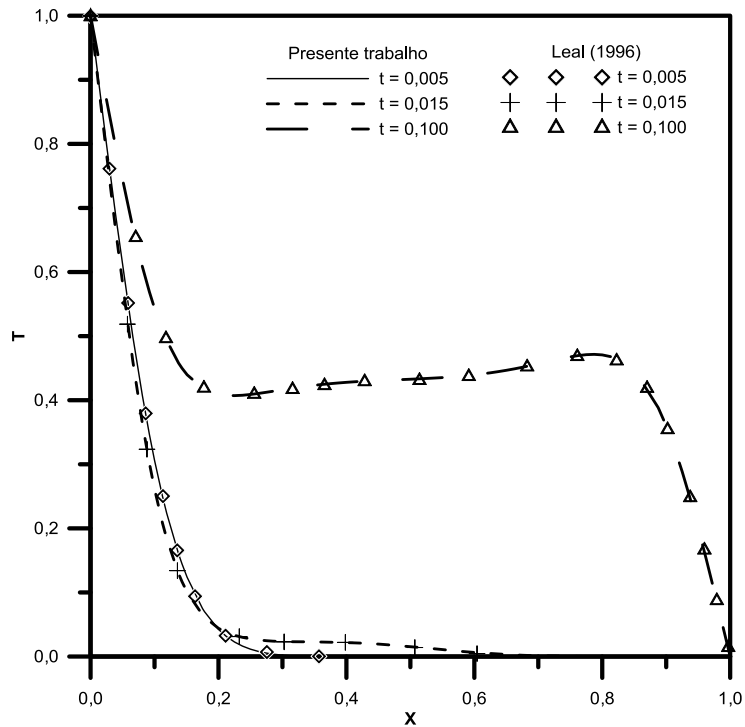


Figura 3.2.a – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^5$ , em diferentes tempos.

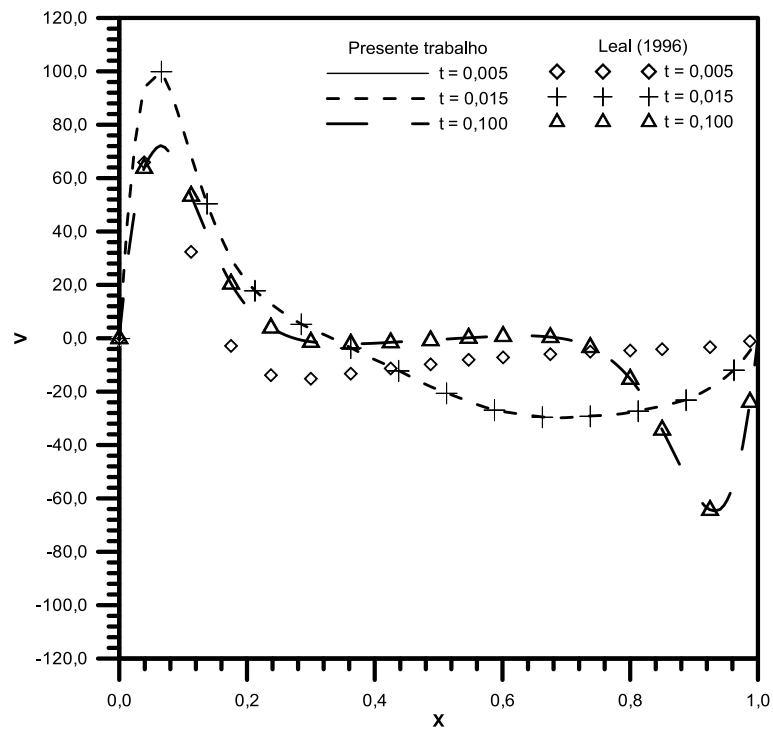


Figura 3.2.b – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $v$ ) ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Ra = 10^5$ , em diferentes tempos.

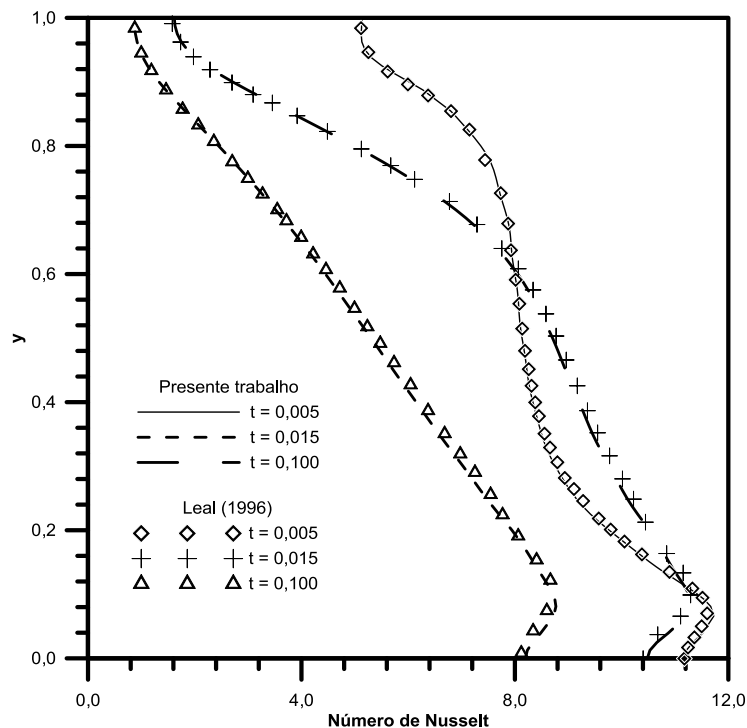


Figura 3.2.c – Comparação da distribuição do número Nusselt local, para  $Ra = 10^5$ , ao longo da parede quente da cavidade ( $x = 0$ ) em diferentes tempos.

### 3.2 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Para efeitos de monitoramento da convergência são apresentados os seguintes parâmetros comumente utilizados em literatura:

$|\psi|$  - Módulo da função corrente.

$\bar{Nu}$  - Número de Nusselt médio através da cavidade.

A seleção de autovalores proposta em Mikhailov e Cotta (1996) e Corrêa et al (1997), que toma como base um problema puramente difusivo, foi utilizada neste trabalho, no entanto as taxas de convergência para altos números de Grashof ( $Gr = 10^6$ ) não apresentam resultados satisfatórios. Portanto, será necessário um estudo com processos de seleção alternativos, tema que é alvo de estudos recentes e não será tratado neste trabalho. Esta necessidade ficou evidente através do monitoramento das taxas de convergência para números de Grashof

elevados obtidos com este tipo de ordenamento. Observeu-se que em tempos menores, com número de Grashof altos e número de Hartmann baixo (equações fortemente acopladas e com grau de não-linearidade maior), no início do processo transiente, os autovalores de maior relevância na solução retardam a convergência, quando esta tendia ao regime permanente, em tempos mais elevados, e vice-versa. Pôde-se constatar, então, que o processo de ordenamento dos campos transformados baseados em um problema puramente difusivo não é, necessariamente, o mais eficaz para problemas convectivo-difusivos.

A eficiência do filtro adotado nesse trabalho é facilmente percebida quando monitoramos as taxas de convergência para altos números de Hartmann, onde o processo difusivo é predominante, e o filtro se mostra suficiente para obtenção dos resultados, apresentando excelentes taxas de convergência. O mesmo não ocorre para baixos números de Hartmann, quando o processo de convecção é predominante.

A convergência para todos os números de Grashof estudados foi analisada somente para os casos limites (onde as equações estão mais fortemente acopladas e com maior ou menor grau de não-linearidade). Ou seja, sem a presença do campo magnético,  $Ha = 0$ , e com o mais intenso campo magnético,  $Ha = 50$  e  $100$ . Foram utilizados para análise de convergência o módulo da função corrente e a temperatura adimensional nos pontos  $(x = 0,1; y = 0,1)$ ,  $(x = 0,1; y = 0,9)$ ,  $(x = 0,5; y = 0,1)$ ,  $(x = 0,5; y = 0,9)$ ,  $(x = 0,9; y = 0,1)$  e  $(x = 0,5; y = 0,9)$  da cavidade, nos quatro cantos e no centro próximo às paredes verticais e horizontais da cavidade, e ainda o número de Nusselt médio global.

A obtenção da convergência para  $Gr = 10^4$  e números de  $Ha = 0$  e  $50$ , apresentaram uma excelente taxa de convergência em três algarismo significativos no início do processo transiente, como mostrado nas Tabelas (3.1.a,b). O número de Nusselt médio global e a temperatura convergem com menos termos na ordem de truncamento, enquanto que o módulo da função corrente tem uma taxa de convergência menor. As Tabelas (3.2.a,b) mostram também excelentes taxas de convergência em regime permanente para o mesmo número de Grashof.

É interessante chamar atenção para fato de que a obtenção de convergência no início do processo transiente para números de Grashof elevados, para a alternativa de ordenamento testada e com o filtro adotado, envolve alguma dificuldade, ver Tabelas (3.3.a,b) e (3.4.a,b). A taxa de convergência é mais afetada para número de Hartmann igual a zero, pois muitos

termos passam a ser necessários para precisão anteriormente estipulada para o problema tanto transiente quanto em estado permanente. Para Hartmann alto,  $H_a = 100$ , apresentaram convergência garantida em pelo menos dois algarismos significativos na pior situação, que expressam um bom grau de confiabilidade em toda faixa da variável tempo e em regime permanente.

Tabela 3.1a – Convergência para o número de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$ .

Gr = $10^4$ ; Ha = 0 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{N}u$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
40/40	1,000	0,198E-02	0,309	0,204E-02	0,330
80/80	1,001	0,257E-02	0,305	0,264E-02	0,329
120/120	1,001	0,267E-02	0,304	0,274E-02	0,330
160/160	1,001	0,267E-02	0,304	0,274E-02	0,330
200/200	1,001	0,264E-02	0,304	0,272E-02	0,330
240/240	1,001	0,263E-02	0,304	0,270E-02	0,330
260/260	1,001	0,261E-02	0,303	0,269E-02	0,330
280/280	1,001	0,261E-02	0,303	0,268E-02	0,330
300/300	1,001	0,261E-02	0,304	0,268E-02	0,330
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
40/40		0,590E-03	0	0,605E-03	0
80/80		0,618E-03	0	0,624E-03	0
120/120		0,582E-03	0	0,594E-03	0
160/160		0,603E-03	0	0,611E-03	0
200/200		0,594E-03	0	0,603E-03	0
240/240		0,591E-03	0	0,601E-03	0
260/260		0,597E-03	0	0,606E-03	0
280/280		0,597E-03	0	0,606E-03	0
300/300		0,597E-03	0	0,606E-03	0
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
40/40		0,101E-03	0	0,100E-03	0
80/80		0,818E-04	0	0,788E-04	0
120/120		0,544E-04	0	0,540E-04	0
160/160		0,480E-04	0	0,488E-04	0
200/200		0,509E-04	0	0,515E-04	0
240/240		0,558E-04	0	0,557E-04	0
260/260		0,496E-04	0	0,501E-04	0
280/280		0,515E-04	0	0,520E-04	0
300/300		0,540E-04	0	0,541E-04	0

Tabela 3.1b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$ .

Gr = $10^4$ ; Ha = 50 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
40/40	1,000	0,648E-03	0,315	0,655E-03	0,323
80/80	1,000	0,957E-03	0,312	0,964E-03	0,321
120/120	1,000	0,102E-02	0,312	0,103E-02	0,322
160/160	1,000	0,103E-02	0,312	0,104E-02	0,322
200/200	1,000	0,102E-02	0,312	0,103E-02	0,322
240/240	1,000	0,102E-02	0,312	0,102E-02	0,322
260/260	1,000	0,101E-02	0,312	0,102E-02	0,322
280/280	1,000	0,100E-02	0,312	0,101E-02	0,322
300/300	1,000	0,100E-02	0,312	0,101E-02	0,322
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
40/40		0,340E-03	0	0,343E-03	0
80/80		0,355E-03	0	0,358E-03	0
120/120		0,343E-03	0	0,346E-03	0
160/160		0,361E-03	0	0,363E-03	0
200/200		0,355E-03	0	0,358E-03	0
240/240		0,353E-03	0	0,356E-03	0
260/260		0,361E-03	0	0,364E-03	0
280/280		0,361E-03	0	0,364E-03	0
300/300		0,361E-03	0	0,364E-03	0
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
40/40		0,458E-04	0	0,460E-04	0
80/80		0,626E-04	0	0,626E-04	0
120/120		0,507E-04	0	0,508E-04	0
160/160		0,483E-04	0	0,485E-04	0
200/200		0,486E-04	0	0,489E-04	0
240/240		0,505E-04	0	0,507E-04	0
260/260		0,472E-04	0	0,475E-04	0
280/280		0,481E-04	0	0,484E-04	0
300/300		0,498E-04	0	0,501E-04	0

Tabela 3.2a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$ .

Gr = $10^4$ ; Ha = 0 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
40/40	2,009	0,321E-02	0,698	0,182E-02	0,938
80/80	2,010	0,349E-02	0,696	0,181E-02	0,938
120/120	2,010	0,353E-02	0,695	0,179E-02	0,938
160/160	2,010	0,353E-02	0,695	0,178E-02	0,938
200/200	2,010	0,352E-02	0,695	0,178E-02	0,938
240/240	2,010	0,352E-02	0,695	0,179E-02	0,938
260/260	2,010	0,352E-02	0,695	0,178E-02	0,938
280/280	2,010	0,352E-02	0,695	0,179E-02	0,938
300/300	2,010	0,352E-02	0,695	0,179E-02	0,938
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
40/40		0,946E-02	0,227	0,946E-02	0,772
80/80		0,945E-02	0,228	0,945E-02	0,771
120/120		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
160/160		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
200/200		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
240/240		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
260/260		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
280/280		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
300/300		0,944E-02	0,228	0,944E-02	0,771
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
40/40		0,182E-02	0,617E-01	0,321E-02	0,301
80/80		0,181E-02	0,612E-01	0,349E-02	0,303
120/120		0,179E-02	0,613E-01	0,353E-02	0,304
160/160		0,178E-02	0,612E-01	0,353E-02	0,304
200/200		0,178E-02	0,612E-01	0,352E-02	0,304
240/240		0,179E-02	0,612E-01	0,352E-02	0,304
260/260		0,178E-02	0,612E-01	0,352E-02	0,304
280/280		0,179E-02	0,612E-01	0,352E-02	0,304
300/300		0,179E-02	0,612E-01	0,352E-02	0,304

Tabela 3.2b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$ .

Gr = $10^4$ ; Ha = 50 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
40/40	1,018	0,592E-03	0,879	0,508E-03	0,916
80/80	1,018	0,702E-03	0,878	0,593E-03	0,916
120/120	1,018	0,724E-03	0,878	0,606E-03	0,916
160/160	1,019	0,727E-03	0,878	0,608E-03	0,916
200/200	1,019	0,724E-03	0,878	0,605E-03	0,916
240/240	1,019	0,722E-03	0,878	0,605E-03	0,916
260/260	1,019	0,719E-03	0,878	0,602E-03	0,916
280/280	1,019	0,719E-03	0,878	0,602E-03	0,916
300/300	1,019	0,719E-03	0,878	0,602E-03	0,916
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
40/40		0,185E-02	0,440	0,185E-02	0,559
80/80		0,188E-02	0,439	0,188E-02	0,560
120/120		0,188E-02	0,439	0,188E-02	0,560
160/160		0,189E-02	0,439	0,189E-02	0,560
200/200		0,189E-02	0,439	0,189E-02	0,560
240/240		0,188E-02	0,439	0,188E-02	0,560
260/260		0,189E-02	0,439	0,189E-02	0,560
280/280		0,189E-02	0,439	0,189E-02	0,560
300/300		0,189E-02	0,439	0,189E-02	0,560
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
40/40		0,508E-03	0,837E-01	0,592E-03	0,120
80/80		0,593E-03	0,834E-01	0,702E-03	0,1211
120/120		0,606E-03	0,833E-01	0,724E-03	0,121
160/160		0,608E-03	0,832E-01	0,727E-03	0,121
200/200		0,605E-03	0,832E-01	0,724E-03	0,121
240/240		0,605E-03	0,832E-01	0,722E-03	0,121
260/260		0,602E-03	0,832E-01	0,719E-03	0,121
280/280		0,602E-03	0,839E-01	0,719E-03	0,121
300/300		0,602E-03	0,832E-01	0,719E-03	0,121



Tabela 3.3a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$ .

Gr = $10^6$ ; Ha = 0 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
80/80	7,105	0,7165E-02	0,3076E-01	0,2054E-01	0,412
120/120	7,407	0,7277E-02	0,1537E-01	0,2127E-01	0,434
160/160	7,548	0,6743E-02	0,1906E-01	0,2106E-01	0,436
200/200	7,673	0,6083E-02	0,1689E-01	0,2135E-01	0,441
240/240	7,710	0,6120E-02	0,1907E-01	0,2136E-01	0,440
260/260	7,751	0,5799E-02	0,1947E-01	0,2135E-01	0,445
280/280	7,768	0,5837E-02	0,2155E-01	0,2132E-01	0,446
300/300	7,771	0,5930E-02	0,2647E-01	0,2138E-01	0,445
320/320	7,795	0,5762E-02	0,2150E-01	0,2138E-01	0,446
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
80/80		0,291E-02	0	0,177E-01	0,327
120/120		0,209E-02	0	0,177E-01	0,367
160/160		0,306E-02	0	0,171E-01	0,396
200/200		0,245E-02	0	0,173E-01	0,426
240/240		0,253E-02	0	0,174E-01	0,437
260/260		0,278E-02	0	0,174E-01	0,443
280/280		0,275E-02	0	0,176E-01	0,447
300/300		0,272E-02	0	0,174E-01	0,446
320/320		0,256E-02	0	0,174E-01	0,448
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
80/80		0,443E-03	0	0,833E-03	0
120/120		0,305E-03	0	0,831E-03	0
160/160		0,173E-03	0	0,921E-03	0
200/200		0,214E-03	0	0,173E-01	0
240/240		0,538E-03	0	0,906E-03	0
260/260		0,231E-03	0	0,924E-03	0
280/280		0,353E-03	0	0,889E-03	0
300/300		0,456E-03	0	0,911E-03	0
320/320		0,310E-03	0	0,924E-03	0

Tabela 3.3b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em  $t = 0,005$ , para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$ .

Gr = 10 <sup>6</sup> ; Ha = 100 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
120/120	1,148	0,329E-02	0,174	0,409E-02	0,434
160/160	1,181	0,331E-02	0,172	0,413E-02	0,436
200/200	1,191	0,324E-02	0,170	0,410E-02	0,441
240/240	1,196	0,321E-02	0,172	0,405E-02	0,441
260/260	1,200	0,315E-02	0,172	0,402E-02	0,442
280/280	1,202	0,313E-02	0,171	0,401E-02	0,443
300/300	1,203	0,313E-02	0,173	0,400E-02	0,441
320/320	1,205	0,310E-02	0,173	0,398E-02	0,442
325/325	1,205	0,310E-02	0,172	0,398E-02	0,442
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
120/120		0,135E-02	0	0,202E-02	0
160/160		0,145E-02	0	0,211E-02	0
200/200		0,142E-02	0	0,211E-02	0
240/240		0,140E-02	0	0,211E-02	0
260/260		0,146E-02	0	0,216E-02	0
280/280		0,146E-02	0	0,217E-02	0
300/300		0,146E-02	0	0,216E-02	0
320/320		0,144E-02	0	0,215E-02	0
325/325		0,144E-02	0	0,216E-02	0
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
120/120		0,245E-03	0	0,305E-03	0
160/160		0,234E-03	0	0,305E-03	0
200/200		0,232E-03	0	0,308E-03	0
240/240		0,240E-03	0	0,311E-03	0
260/260		0,225E-03	0	0,301E-03	0
280/280		0,228E-03	0	0,305E-03	0
300/300		0,237E-03	0	0,311E-03	0
320/320		0,234E-03	0	0,309E-03	0
325/325		0,231E-03	0	0,309E-03	0

Tabela 3.4a – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$ .

Gr = $10^6$ ; Ha = 0 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
80/80	7,406	0,664E-02	0,245	0,935E-02	0,785
120/120	7,591	0,635E-02	0,232	0,738E-02	0,809
160/160	7,891	0,618E-02	0,224	0,849E-02	0,824
200/200	7,944	0,586E-02	0,224	0,815E-02	0,822
240/240	7,873	0,572E-02	0,232	0,801E-02	0,814
260/260	7,981	0,562E-02	0,229	0,790E-02	0,823
280/280	7,941	0,557E-02	0,232	0,801E-02	0,819
300/300	7,935	0,558E-02	0,233	0,812E-02	0,816
320/320	7,993	0,555E-02	0,231	0,785E-02	0,821
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
80/80		0,458E-02	0,197	0,458E-02	0,802
120/120		0,374E-02	0,204	0,374E-02	0,795
160/160		0,425E-02	0,176	0,425E-02	0,823
200/200		0,389E-02	0,178	0,389E-02	0,821
240/240		0,398E-02	0,182	0,398E-02	0,817
260/260		0,413E-02	0,176	0,413E-02	0,823
280/280		0,414E-02	0,180	0,414E-02	0,819
300/300		0,412E-02	0,181	0,412E-02	0,818
320/320		0,400E-02	0,178	0,400E-02	0,821
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
80/80		0,935E-02	0,214	0,664E-02	0,754
120/120		0,738E-02	0,190	0,635E-02	0,767
160/160		0,849E-02	0,175	0,618E-02	0,775
200/200		0,815E-02	0,177	0,586E-02	0,775
240/240		0,801E-02	0,185	0,572E-02	0,767
260/260		0,790E-02	0,176	0,562E-02	0,770
280/280		0,801E-02	0,180	0,557E-02	0,767
300/300		0,812E-02	0,183	0,558E-02	0,766
320/320		0,785E-02	0,178	0,555E-02	0,768

Tabela 3.4b – Convergência para os números de Nusselt, módulo da função corrente e temperatura em regime permanente, para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$ .

Gr = 10 <sup>6</sup> ; Ha = 100 ; Pr = 0,71					
NV/NT	$\bar{Nu}$	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,1	T x = 0,1; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,1; y = 0,9	T x = 0,1; y = 0,9
120/120	3,077	0,310E-02	0,422	0,113E-02	0,950
160/160	3,113	0,314E-02	0,418	0,113E-02	0,951
200/200	3,138	0,310E-02	0,415	0,112E-02	0,951
240/240	3,142	0,305E-02	0,416	0,113E-02	0,951
260/260	3,157	0,302E-02	0,414	0,111E-02	0,951
280/280	3,158	0,301E-02	0,415	0,110E-02	0,951
300/300	3,159	0,300E-02	0,415	0,112E-02	0,951
320/320	3,170	0,298E-02	0,414	0,111E-02	0,951
325/325	3,170	0,298E-02	0,414	0,110E-02	0,951
NV/NT		$ \psi $ x = 0,5; y = 0,1	T x = 0,5; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,5; y = 0,9	T x = 0,5; y = 0,9
120/120		0,312E-02	0,181	0,312E-02	0,818
160/160		0,321E-02	0,179	0,321E-02	0,820
200/200		0,318E-02	0,178	0,318E-02	0,821
240/240		0,316E-02	0,179	0,316E-02	0,820
260/260		0,321E-02	0,178	0,321E-02	0,821
280/280		0,321E-02	0,178	0,321E-02	0,821
300/300		0,321E-02	0,178	0,321E-02	0,821
320/320		0,318E-02	0,178	0,318E-02	0,821
325/325		0,319E-02	0,178	0,319E-02	0,821
NV/NT		$ \psi $ x = 0,9; y = 0,1	T x = 0,9; y = 0,1	$ \psi $ x = 0,9; y = 0,9	T x = 0,9; y = 0,9
120/120		0,113E-02	0,494E-01	0,310E-02	0,577
160/160		0,113E-02	0,488E-01	0,314E-02	0,581
200/200		0,112E-02	0,486E-01	0,310E-02	0,584
240/240		0,113E-02	0,487E-01	0,305E-02	0,583
260/260		0,111E-02	0,485E-01	0,302E-02	0,585
280/280		0,110E-02	0,484E-01	0,301E-02	0,584
300/300		0,112E-02	0,484E-01	0,300E-02	0,584
320/320		0,111E-02	0,483E-01	0,298E-02	0,585
325/325		0,110E-02	0,483E-01	0,298E-02	0,585

### 3.3 ISOLINHAS DE FUNÇÃO CORRENTE E TEMPERATURA

A Figura (3.3.a) mostra o comportamento das isolinhas de função corrente em quatro tempos selecionados para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$ . Observa-se que no menor tempo selecionado,  $t = 0,005$ , ocorre a formação de uma camada limite no escoamento distinta e ao longo da parede lateral quente, nota-se também, a presença de um vórtice distorcido no sentido horário próximo à parede quente. O vórtice desloca-se ao longo do tempo para o centro geométrico da cavidade até assumir aspecto arredondado em regime permanente,  $t = 0,93$ . As isotermas, Figura (3.5.a), mostram que no começo do processo o campo de temperatura se desenvolve similarmente a um problema de condução puro, caracterizando-se por altos gradientes de temperatura ao longo da parede quente. No início do processo, a temperatura da parede é subitamente aumentada de  $T = 0$  para  $T = 1$ , enquanto o fluido adjacente à parede encontra-se quase a temperatura de mistura (“bulk temperature”), esta por sua vez, próxima a temperatura inicial, provocando altos gradientes nessa região. Com o passar do tempo, gradualmente, esses gradientes diminuem e a temperatura da mistura aumenta, as isolinhas adquirem aspecto típico da presença de convecção.

A presença do campo magnético transversal na cavidade quadrada ( $Ha = 50$ ) faz com que o vórtice central e arredondado no centro geométrico da cavidade sofra um alongamento vertical, este comportamento é observado nas isolinhas de função corrente para vários tempos, Figura (3.3.b), que mostra que com o passar do tempo surge uma tendência de quebra do vórtice central e o aparecimento de vórtices secundários. Nas isotermas para o mesmo número de Hartmann, Figura (3.5.b), mostra que inicialmente o processo continua tendo aspecto de um problema de condução pura, só que à medida que o processo avança no tempo os gradientes altos são mantidos e essa característica também é mantida. As isotermas são quase paralelas as paredes verticais, indicando que a maior parte do processo de transferência de calor é feita por condução.

Observando a Figura (3.4), nota-se que à medida que o incremento no número de Hartmann é dado, atenua-se a convecção no interior da cavidade e os gradientes são cada vez menores. Mostrando o aparecimento de uma força contrária a força de empuxo térmico causada pela diferença de temperatura das paredes verticais, esta força, a Força de Lorentz, é originada no campo magnético transversal, o qual a cavidade está permeada, e no movimento

no interior da cavidade. Para as isothermas, Figura (3.6), a presença do campo magnético deixa cada vez mais predominante a transferência de calor por condução, isto é observado pelas isothermas tenderem a ficarem paralelas as paredes verticais a cada incremento no número de Hartmann evidenciando altos gradientes no campo de velocidade.

O segundo número de Grashof analisado,  $Gr = 10^6$ , corresponde a condições em que os efeitos térmicos são de maior magnitude. Assim, o campo magnético necessário para suprimir a convecção natural deve ser mais forte do que foi anteriormente discutido para  $Gr = 10^4$ , para este alto número de Grashof os seguintes números de Hartmann foram analisados  $Ha = 0, 10, 25, 50, 100$ .

A Figura (3.7.a) mostra as isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$  em quatro diferentes tempos. Fica evidente a formação de uma camada limite vertical distinta ao longo da parede aquecida no começo do processo e a formação de pelo menos dois vórtices no centro geométrico da cavidade no maior tempo,  $t = 0,93$ . A descarga de um jato aquecido pela parede lateral, forma inicialmente uma camada horizontal de intrusão que ocorre ao longo da parede horizontal superior da cavidade, como ilustra a Figura (3.9.a), para  $t = 0,005$ . Com o avanço do processo transiente, este escoamento horizontal invade o centro da cavidade dando origem à formação de um núcleo estratificado termicamente, no qual a temperatura aumenta monotonicamente em função da coordenada  $y$ .

Para a situação analisada com alto número de Grashof, como  $Gr = 10^6$ , a convecção evolui rapidamente, o que sugere o aparecimento de uma intensa dinâmica de ondas internas.

Nas Figuras (3.7.b) e (3.9.b) é mostrado o comportamento das isolinhas de função corrente e temperatura, respectivamente, em quatro tempos, agora com presença do campo magnético mais intenso,  $Ha = 100$ , com o avanço do processo transiente o eixo do vórtice central é girado no sentido anti-horário. Isto acontece devido ao efeito de supressão da convecção pela Força de Lorentz, as isolinhas de temperatura tendem a ficar paralelas à parede vertical na medida em que o processo avança no tempo. Observa-se também que, a camada horizontal de intrusão na parede horizontal superior desaparece no início do processo para dar lugar a uma fina camada limite ao longo da parede vertical.

Para o regime permanente as isolinhas de função corrente e temperatura são mostradas nas Figuras (3.8) e (3.10), respectivamente, para vários números de Hartmann. Na medida em que, o número de Hartmann aumenta as isolinhas de função corrente se comportam com um

movimento nos dois lados dos vórtices centrais para a linha de centro horizontal da cavidade, até que eles se combinem para formar um único vórtice central, para  $Ha = 100$ . O eixo central deste vórtice é girado no sentido anti-horário, devido ao efeito de inibição das correntes convectivas ocasionado pela Força de Lorentz.

Com o aumento no número de Hartmann, as isolinhas de temperatura sofrem uma estratificação vertical no centro, pequenos gradientes aparecem no sentido horizontal. Para baixo número de Hartmann,  $Ha = 25$ , ocorre à formação de uma fina camada limite térmica vertical ao longo das paredes. Na medida em que, aumenta-se o número de Hartmann,  $Ha = 100$ , a estratificação da temperatura no núcleo diminui e as camadas limite térmica nas duas paredes laterais desaparecem indicando a predominância da condução no mecanismo de transferência de calor entre a parede quente e fria.

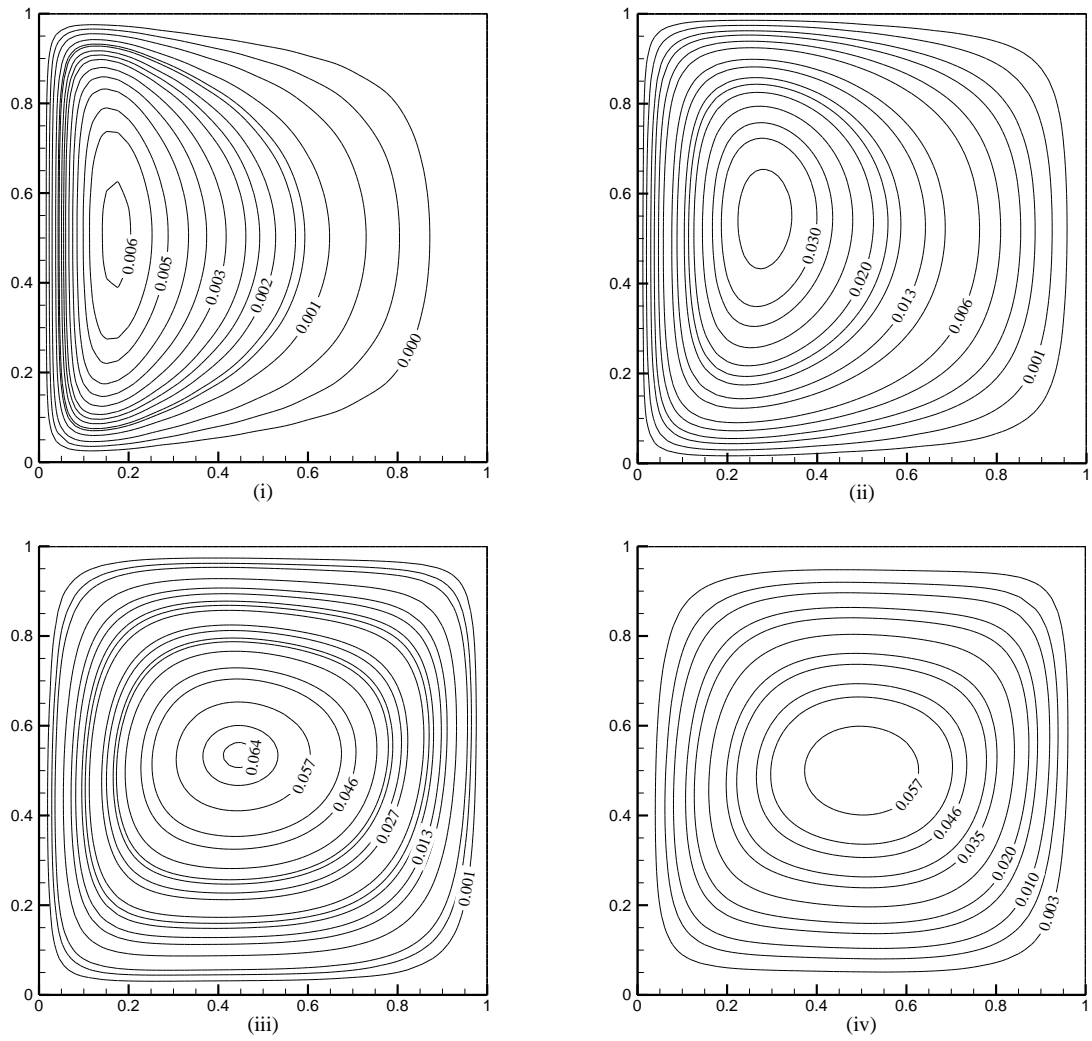


Figura 3.3.a – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .



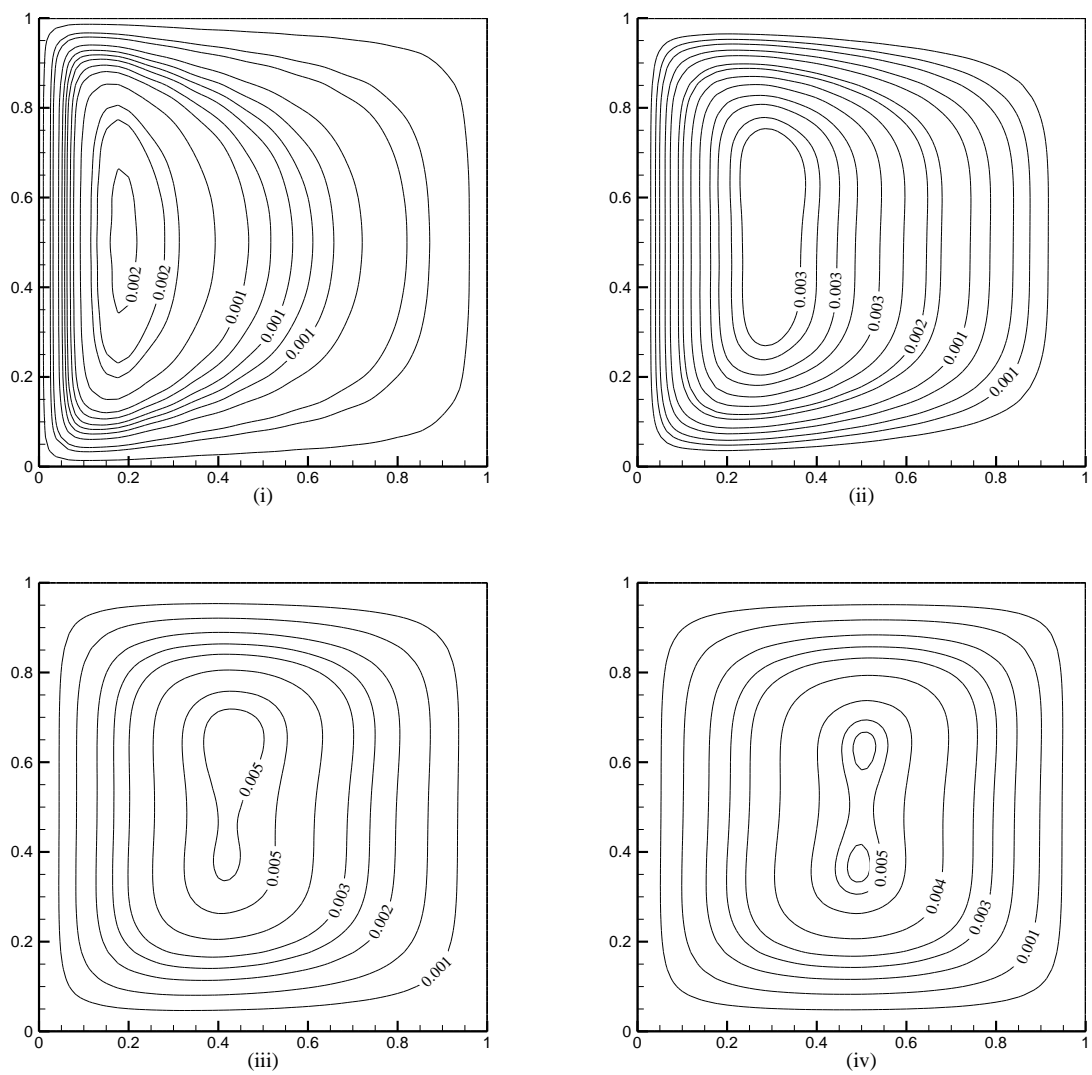


Figura 3.3.b – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

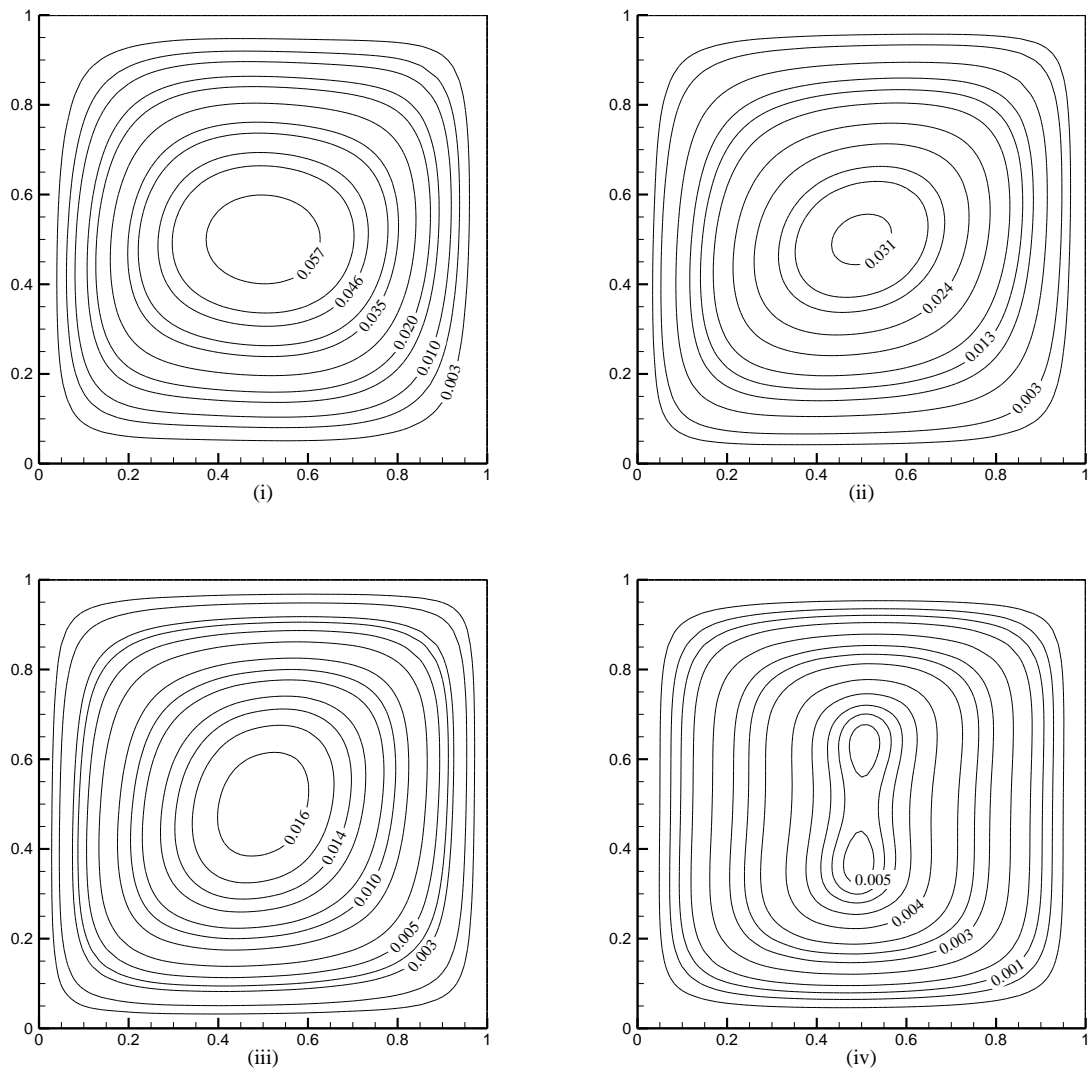


Figura 3.4 – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^4$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (i)  $Ha = 0$ ; (ii)  $Ha = 15$ ; (iii)  $Ha = 25$ ; (iv)  $Ha = 50$ .

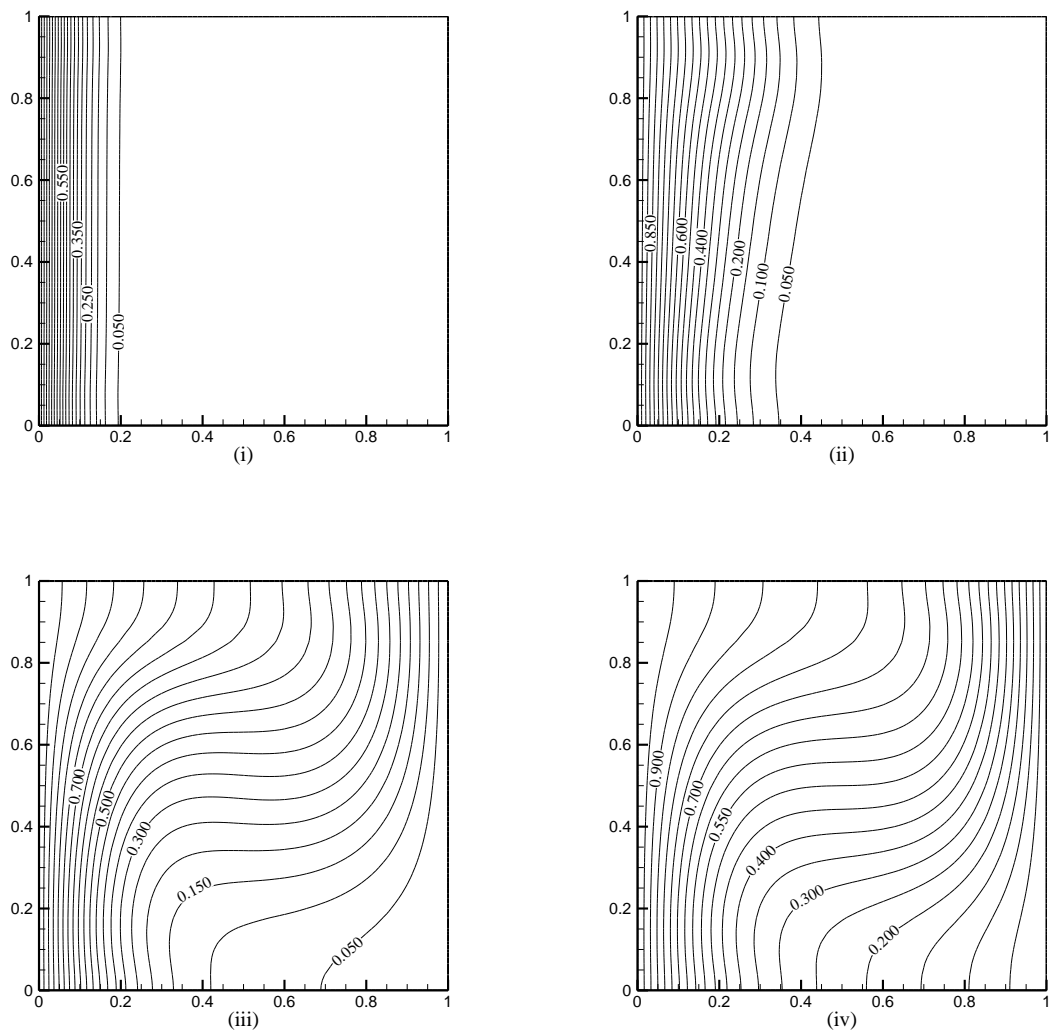


Figura 3.5.a – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 0$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

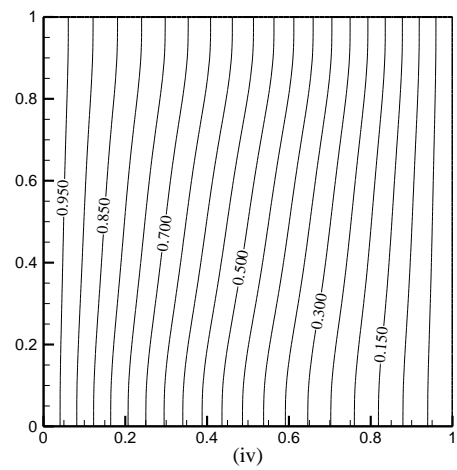
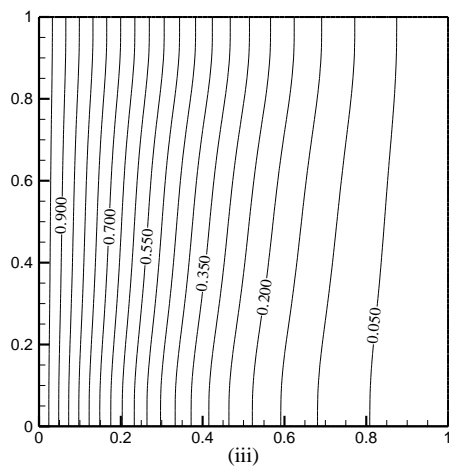
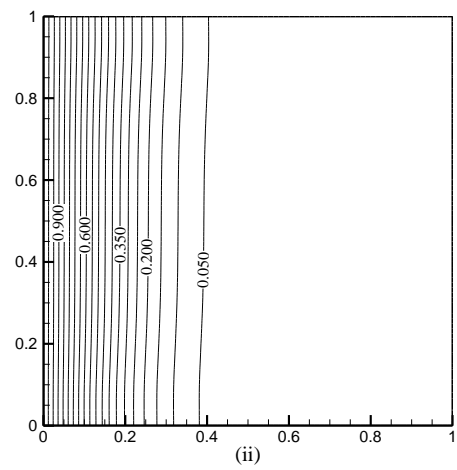
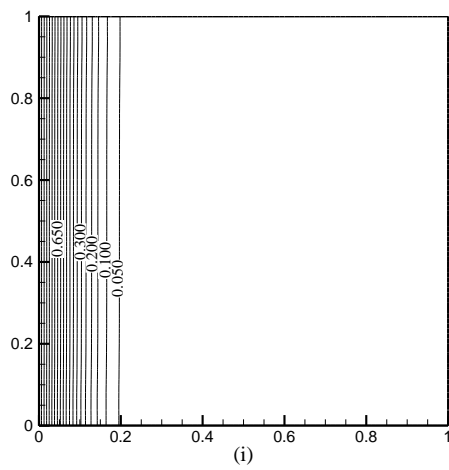


Figura 3.5.b – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  e  $Ha = 50$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

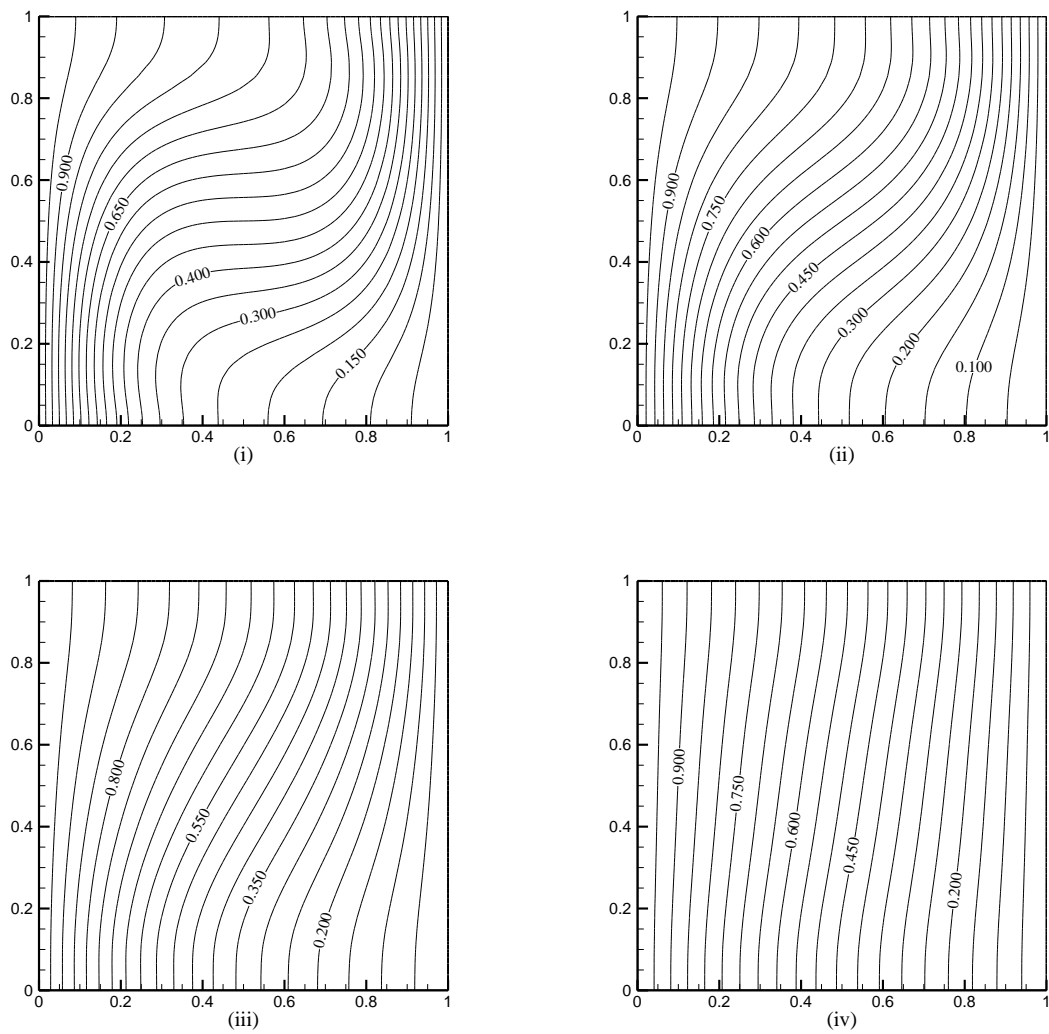


Figura 3.6 – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^4$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (i)  $Ha = 0$ ; (ii)  $Ha = 15$ ; (iii)  $Ha = 25$ ; (iv)  $Ha = 50$ .

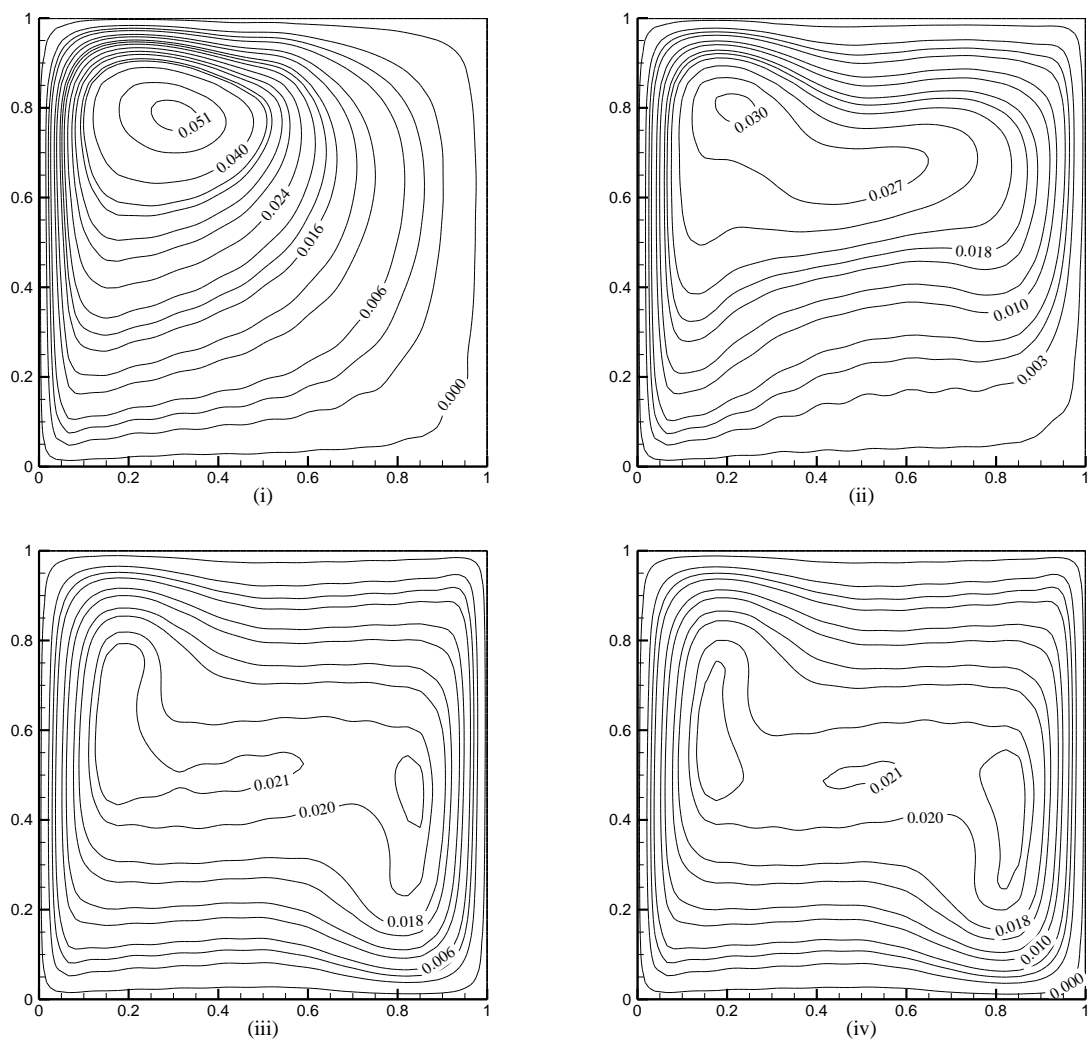


Figura 3.7.a – Isolinas de função corrente para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

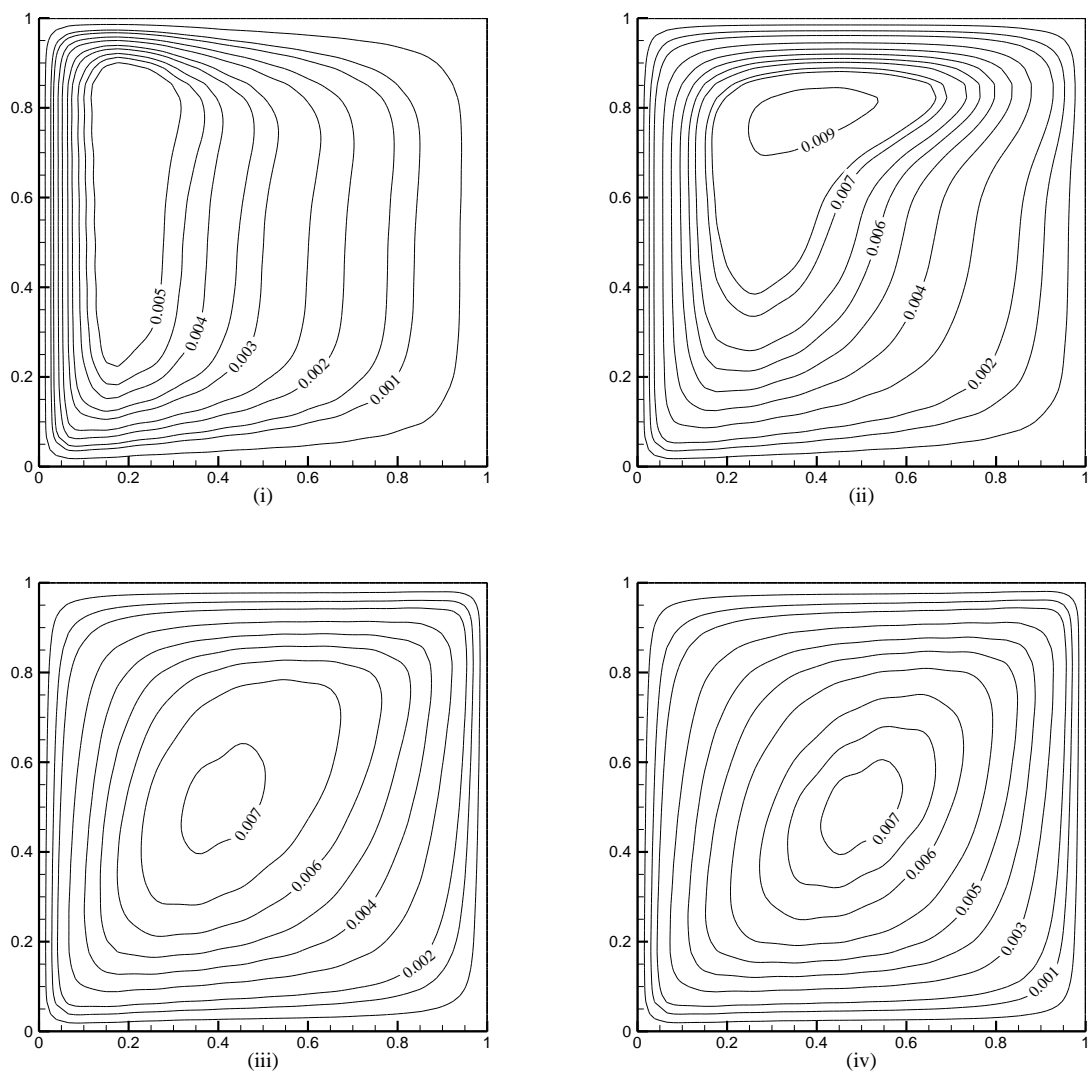


Figura 3.7.b – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

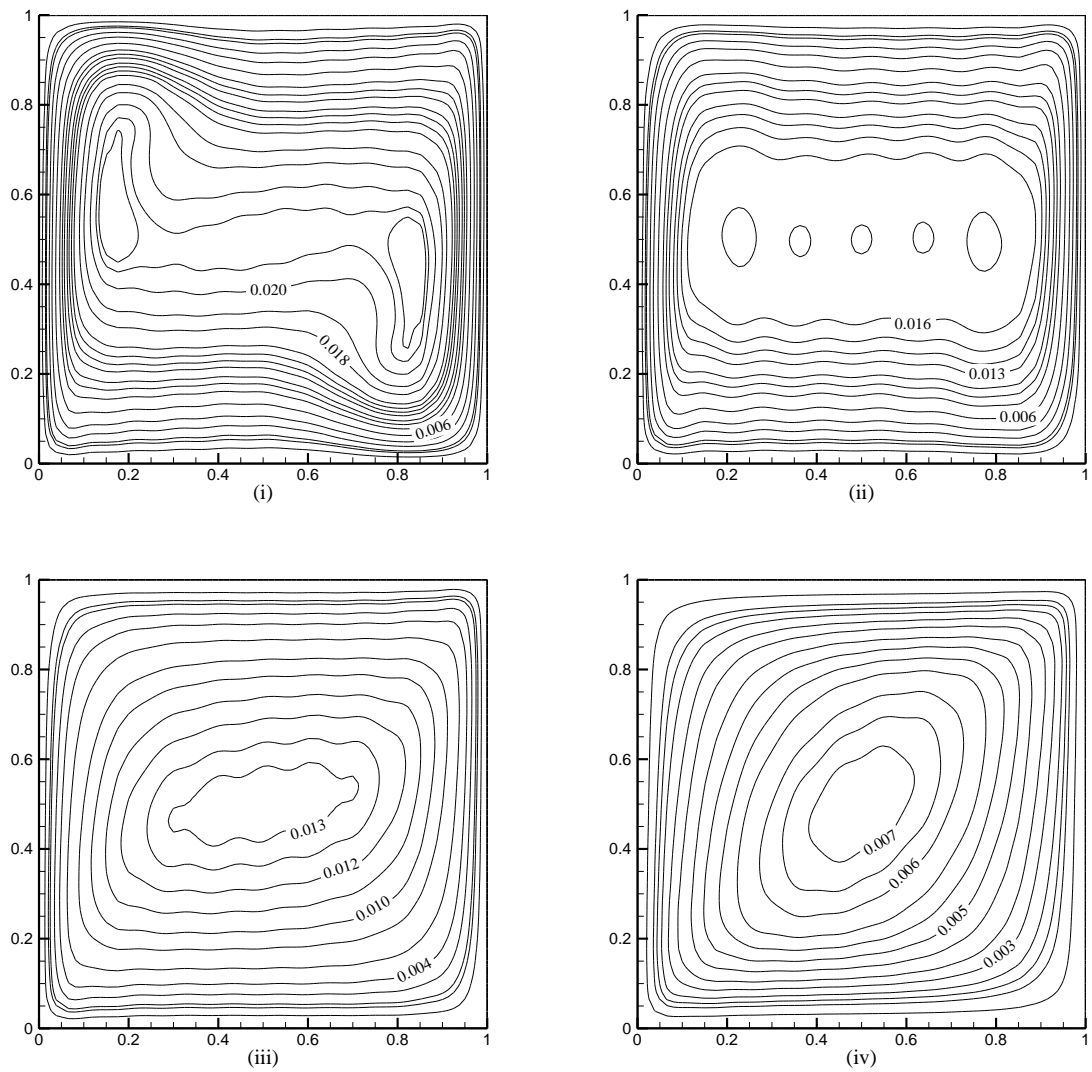


Figura 3.8 – Isolinhas de função corrente para  $Gr = 10^6$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (i)  $Ha = 0$ ; (ii)  $Ha = 25$ ; (iii)  $Ha = 50$ ; (iv)  $Ha = 100$ .



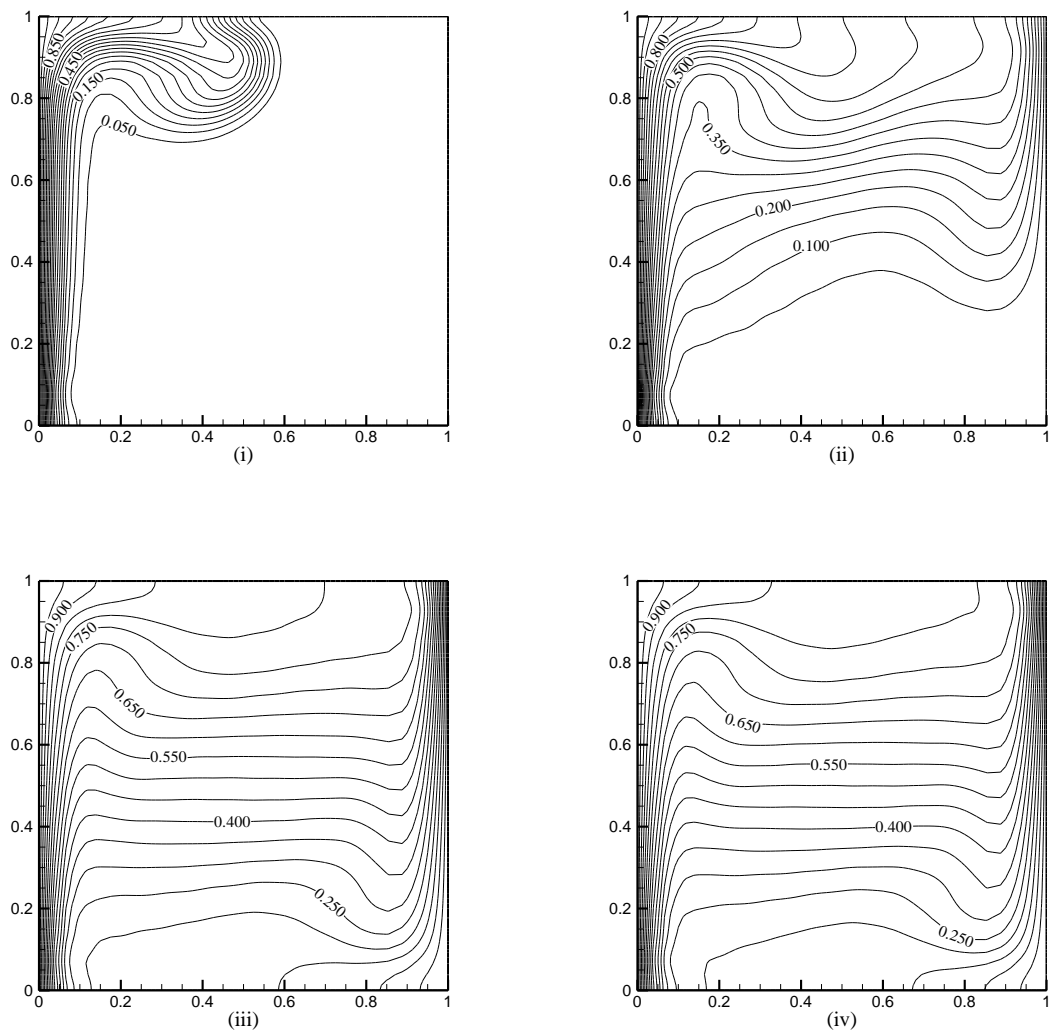


Figura 3.9.a – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 0$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

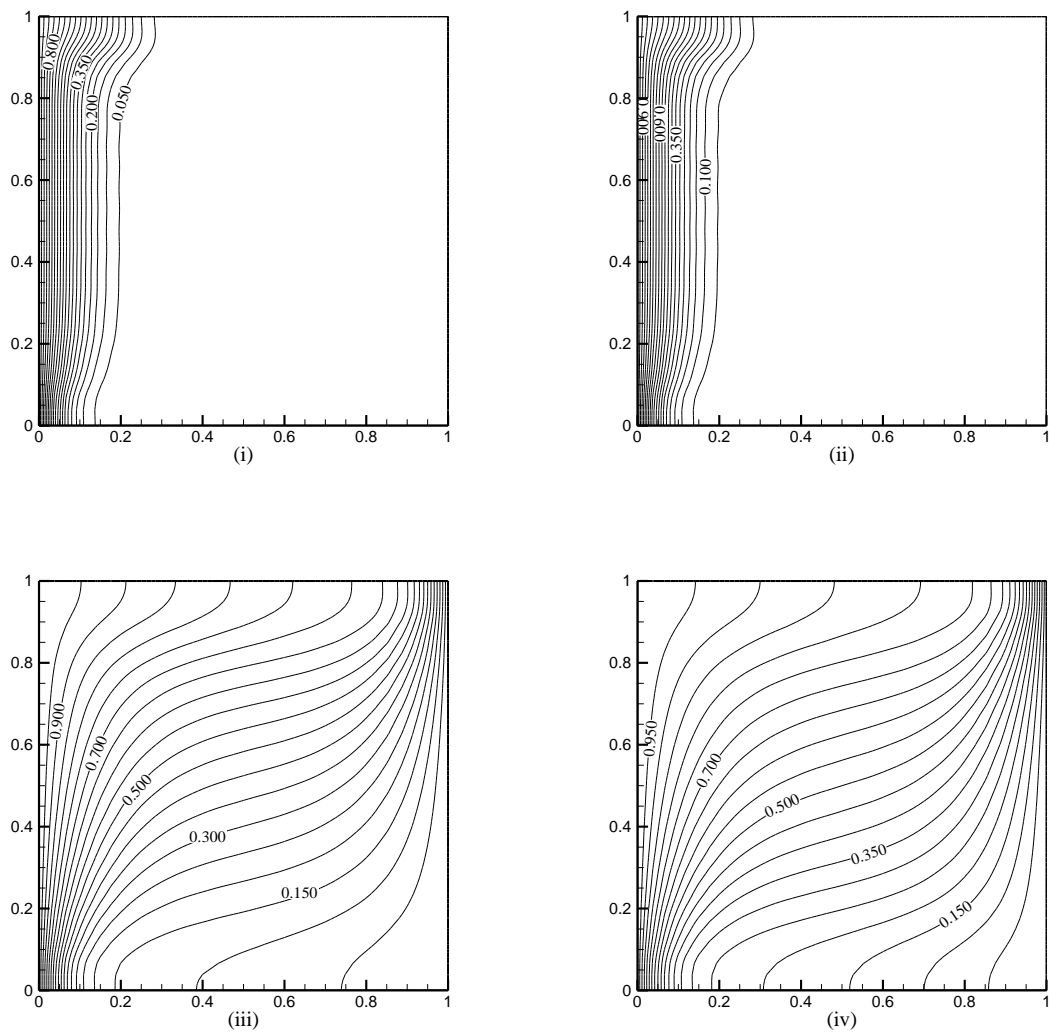


Figura 3.9.b – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  e  $Ha = 100$  em vários tempos.  
 (i)  $t = 0,005$ ; (ii)  $t = 0,02$ ; (iii)  $t = 0,1$ ; (iv)  $t = 0,93$ .

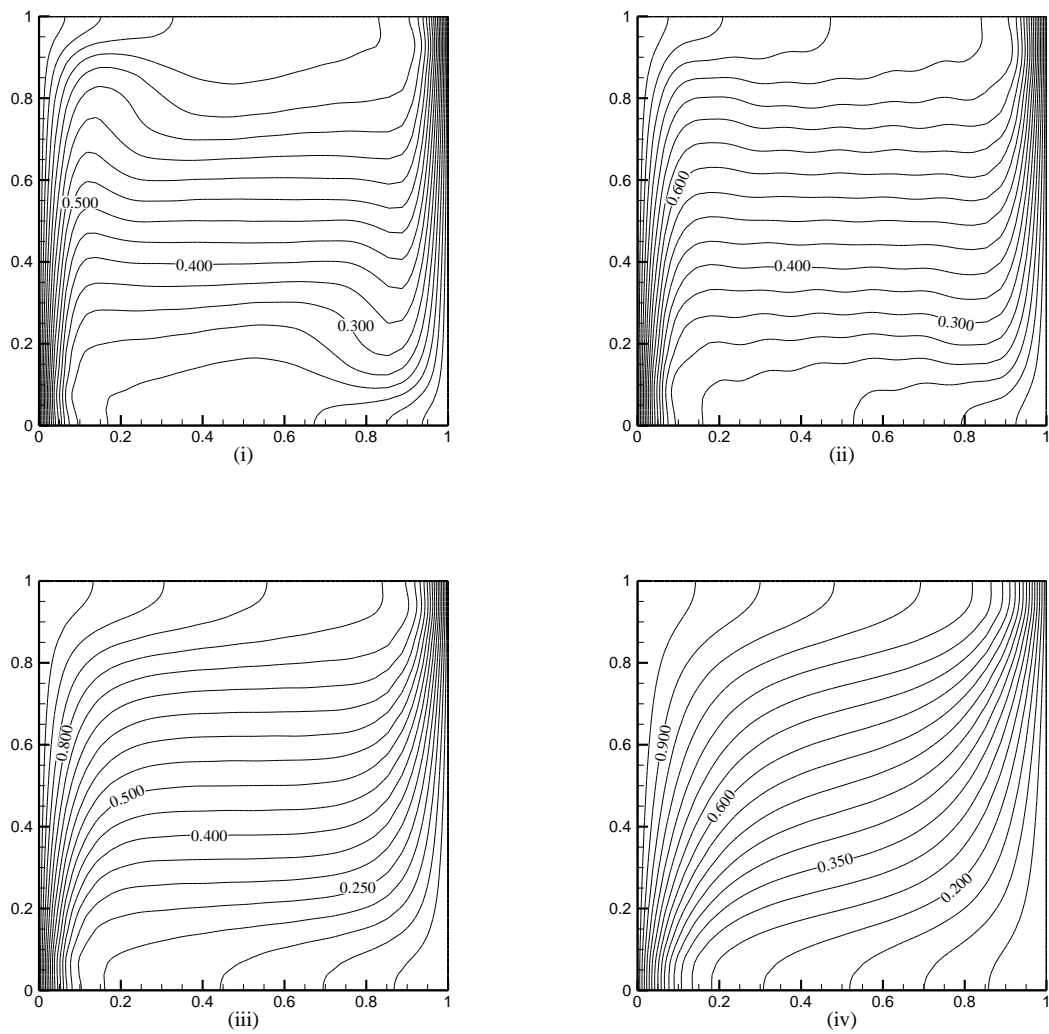


Figura 3.10 – Isolinhas de temperatura para  $Gr = 10^6$  em regime permanente para vários números de Hartmann. (i)  $Ha = 0$ ; (ii)  $Ha = 25$ ; (iii)  $Ha = 50$ ; (iv)  $Ha = 100$ .

### 3.4 PERFIL DE VELOCIDADE

O comportamento do campo de velocidade fica mais evidente ao se observa a Figura (3.11.a), onde são comparados os resultados obtidos via GITT e os resultados obtidos por Colaço et al (2009) para o perfil de velocidade na direção “x” no plano vertical mediano da cavidade ( $x = 1/2$ ). Para o menor número de Hartmann ( $Ha = 0$ ) analisado, o comportamento do campo de velocidade neste ponto indica a existência de um vórtice, um ponto de velocidade nula em ( $y = 1/2$ ), e os altos gradientes do centro para as paredes verticais indicam a existências de correntes convectivas. Já para o maior número de Hartmann ( $Ha = 50$ ) analisado, o comportamento é idêntico ao mostrado na Figura (3.3.a) o campo magnético suprime as correntes convectivas, devido ao aparecimento da força de Lorentz se opondo a força de empuxo térmico.

Os resultados para o campo de temperatura obtidos via GITT também são comparados com Colaço et al (2009), Figura (3.11.b), para o perfil de temperatura adimensional no plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), um comportamento idêntico mostrado na Figura (3.3.b), ou seja, a transferência de calor se dando predominante por condução com altos gradientes para o maior número de Hartmann, a diminuição destes gradientes é observada e o aspecto típico da presença de convecção é observado para os menores números de Hartmann.

As Figuras (3.11.a,b), mostram uma excelente concordância entre os resultados obtidos via GITT e os disponíveis na literatura, obtidos por outras técnica de solução, os melhores resultados obtidos por Colaço et al (2009), o que mostra a capacidade do método híbrido de obter resultados benchmark.

Os resultados do campo de velocidade obtidos para alto número de Grashof,  $Gr = 10^6$ , via GITT mostrado na Figura (3.12.a) apresentaram uma excelente concordância com os melhores resultados obtidos por Colaço et al (2009) para  $Ha = 25, 50$  e  $100$ .

Para baixos números de Hartmann ,  $H = 0$  e  $15$ , apesar de apresentarem a mesma tendência mostram uma sutil diferença com os obtidos por Colaço et al (2009). Isso deve-se ao fato das equações que dominam o processo estarem mais fortemente acopladas para baixos números de Hartmann. Para o campo de temperatura a discrepância para baixos números de Hartmann desaparece, ver Figura (3.12.b), a concordância é excelente para todos os números de Hartmann.

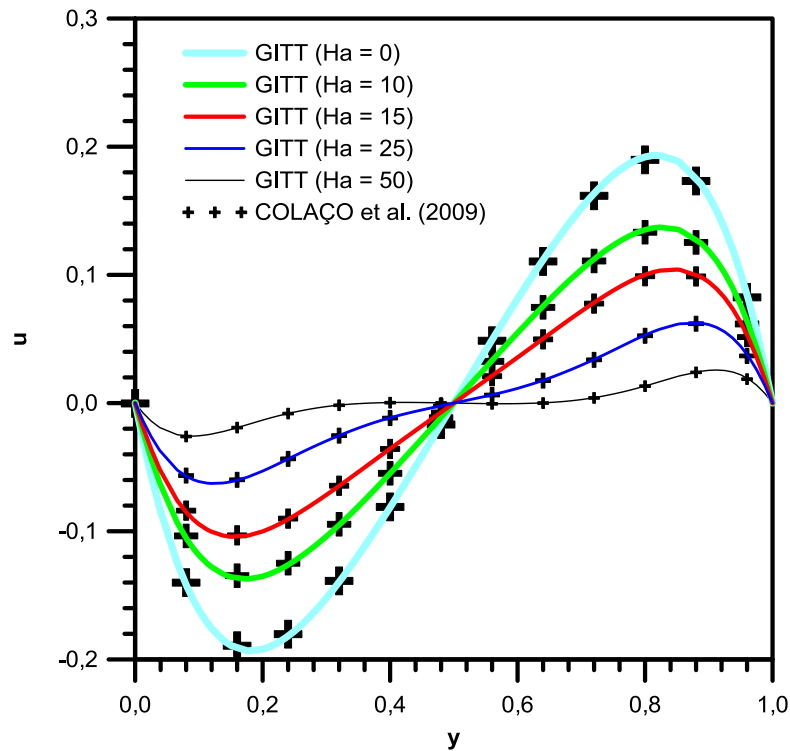


Figura 3.11.a – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $u$ ) ao longo do plano vertical mediano da cavidade ( $x = 1/2$ ), para  $Gr = 10^4$  em regime permanente.

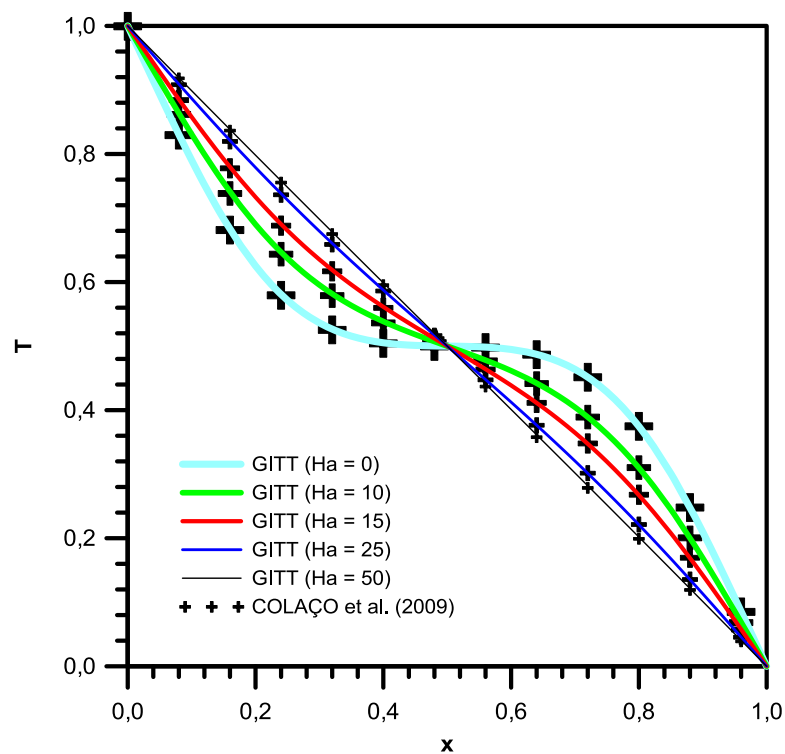


Figura 3.11.b – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Gr = 10^4$  em regime permanente.

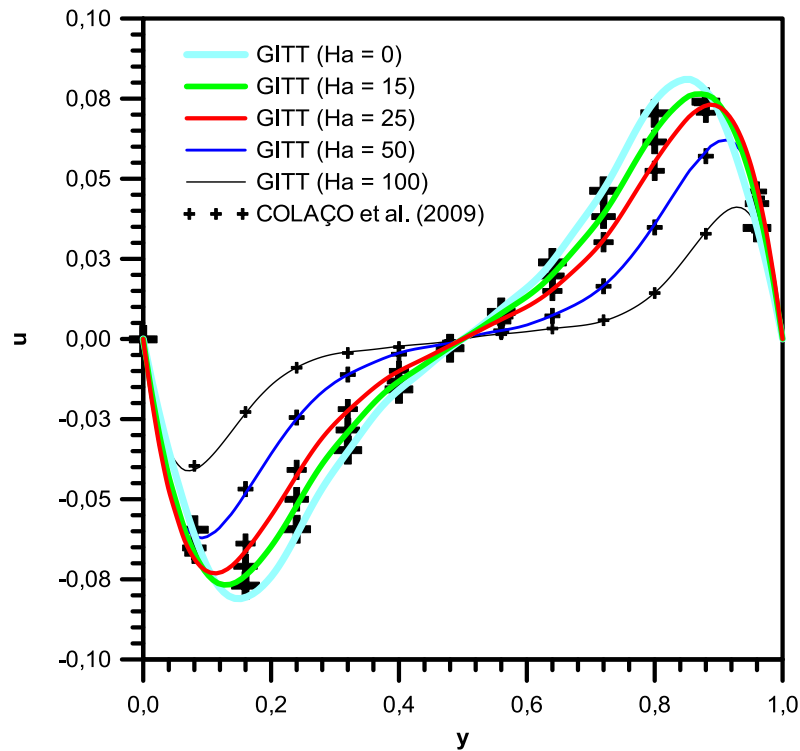


Figura 3.12.a – Comparação do perfil da componente vertical de velocidade ( $u$ ) ao longo do plano vertical mediano da cavidade ( $x = 1/2$ ), para  $Gr = 10^6$  em regime permanente.

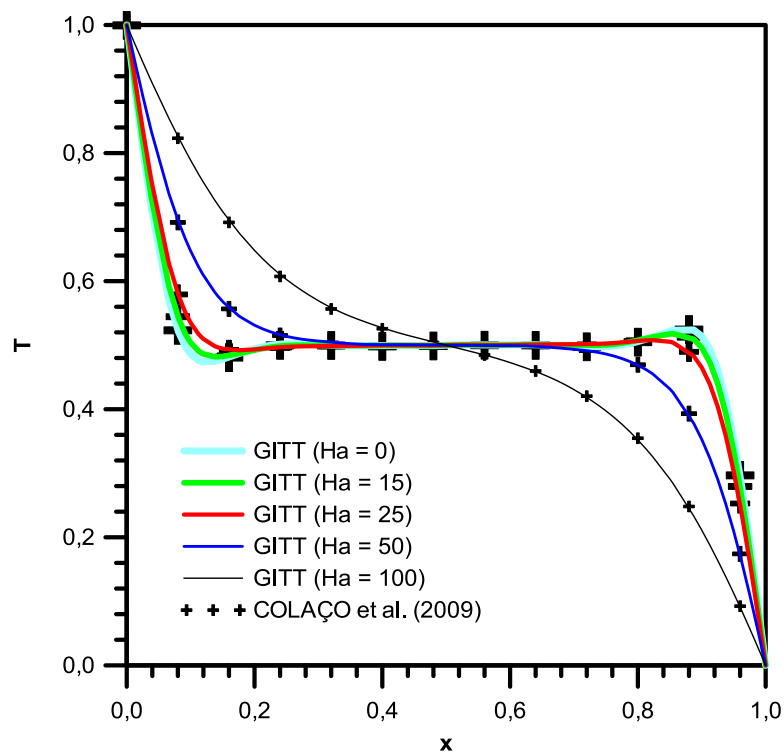


Figura 3.12.b – Comparação do perfil de temperatura ao longo do plano horizontal mediano da cavidade ( $y = 1/2$ ), para  $Gr = 10^6$  em regime permanente.

### 3.5 NÚMERO DE NUSSOLT

A variação do número de Nusselt médio global com o tempo, para  $Gr = 10^4$  e vários números de Hartmann é mostrado na Figura (3.13), pode-se observar que para todos os números de Hartmann, o número de Nusselt médio global alcança um pico máximo em um determinado tempo e a partir deste ponto, diminui até um valor constante no tempo, essa diminuição é consequência do declínio dos gradientes de temperatura e velocidade no interior da cavidade. Pelo mesmo motivo, o número de Nusselt médio global diminui com a presença do campo magnético, para os vários números de Hartmann, à medida que o campo magnético suprime a convecção no interior da cavidade, para  $Ha = 50$  temos o menor valor de Nusselt médio global igual a 1,01. A concordância com os resultados fornecidos por Colaço et al (2009) e Al-Najem et al (1998) é excelente, o erro relativo percentual pode ser observado na Tabela (3.5.a).

A Figura (3.14) apresenta o comportamento do número de Nusselt médio global na cavidade para  $Gr = 10^6$  e cada um dos números de Hartmann estudados. Como para este número de Grashof constata-se a presença de fortes oscilações e movimentos internos de onda (LEAL, 1996). O número de Nusselt médio global atinge seu pico máximo em um curto intervalo de tempo, com a supressão da convecção pela presença do campo magnético. O número de Nusselt médio global diminui à medida que se aumenta o número de Hartmann, justamente por amenizar as oscilações e os movimentos internos de onda no interior da cavidade.

A Tabela (3.5.b) mostra a comparação dos resultados obtidos via GITT para  $Gr = 10^6$  e todos os números de Hartmann estudados. Apesar de apresentarem um erro relativo percentual na faixa de 0 à 15,69% podem ser considerados satisfatórios com relação a erros encontrados na literatura, Colaço et al (2009) e Al-Najem et al (1998), obtidos por outros métodos de soluções.

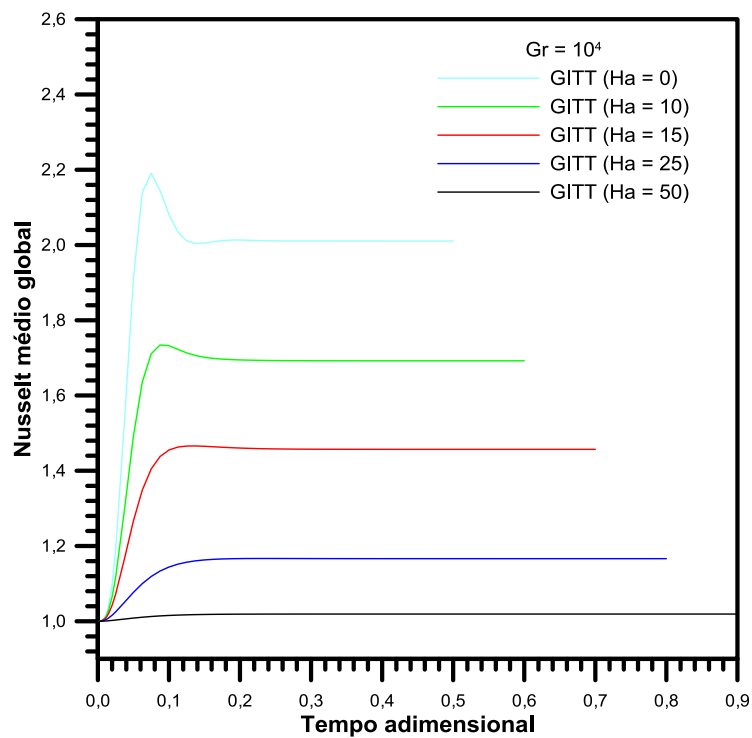


Figura 3.13 – Variação do número de Nusselt médio global com o tempo, para  $Gr = 10^4$  e vários números de Hartmann.

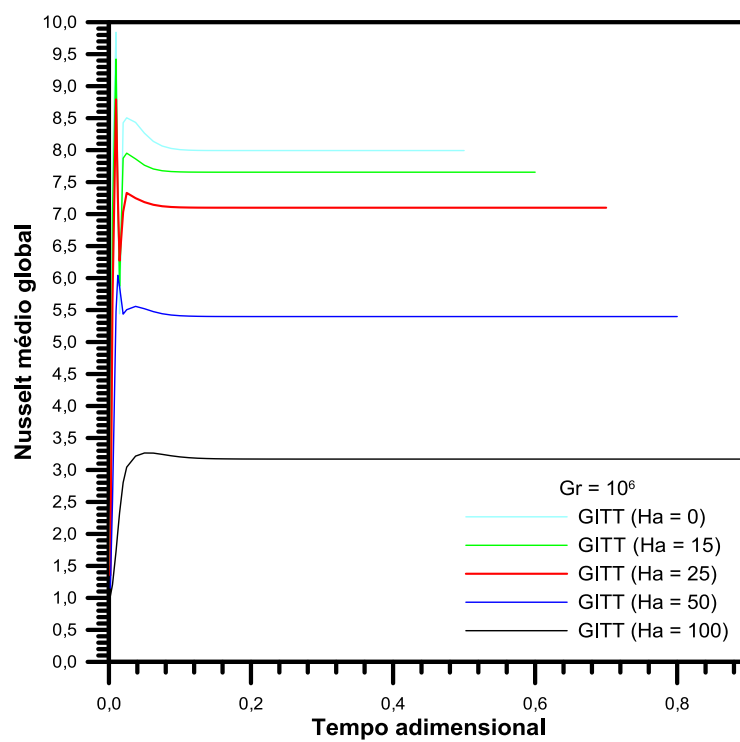


Figura 3.14 – Variação do número de Nusselt médio global com o tempo, para  $Gr = 10^6$  e vários números de Hartmann.



Tabela 3.5a – Comparação dos resultados obtidos via GITT com soluções anteriores, para  $Gr = 10^4$  em regime permanente.

Gr = 10 <sup>4</sup> ; Pr = 0,71					
Ha	$\bar{Nu}$				
	GITT	Outras Técnicas			
		Colaço et al (2009)	Erro (%)	Al-Najem et al (1998)	Erro (%)
0	2,01	2,02	0,50	2,01	0,00
10	1,69	1,70	0,59	1,69	0,00
25	1,16	1,17	0,85	1,14	1,75
50	1,01	0,97	4,12	1,00	1,00

Tabela 3.5b – Comparação dos resultados obtidos via GITT com soluções anteriores, para  $Gr = 10^6$  em regime permanente.

Gr = 10 <sup>6</sup> ; Pr = 0,71					
Ha	$\bar{Nu}$				
	GITT	Outras técnicas			
		Colaço et al (2009)	Erro (%)	Al-Najem et al (1998)	Erro (%)
0	7,99	9,21	13,24	8,76	8,78
10	7,84	9,04	13,27	8,66	9,46
25	7,09	8,32	14,78	8,04	11,81
100	3,17	3,54	10,45	3,76	15,69

## CAPÍTULO 4

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Com o presente trabalho buscou-se estender a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para uma classe mais ampla de problemas complexos da física-matemática. Problemas que envolvam mecânica dos fluidos, transferência de calor e eletromagnetismo, como é o caso do problema tratado no presente trabalho. A técnica híbrida mostrou-se uma ferramenta eficaz na obtenção de resultados acurados com alto grau de não-linearidade e acoplamento, a característica de controlar automaticamente o erro relativo sobre os resultados faz com que a metodologia utilizada neste trabalho fosse empregada com sucesso para se obterem resultados benchmark.

Outra vantagem marcante oferecida pela GITT é que, para fins práticos de engenharia, a técnica pode fornecer resultados com poucos termos nas expansões, que definem com razoável precisão os campos originais, obtidos com baixos custos computacionais e utilizando equipamentos de pequeno porte.

O filtro empregado neste trabalho não é o mais indicado para problemas convectivo-difusivos, pois refere-se à solução para um processo de condução pura, mas para as pretensões deste trabalho foi suficiente e mostrou-se eficaz para soluções obtidas em regime transiente e permanente, o que permitiu a convergência das soluções, dentro de limites computacionais práticos em ampla faixa de número de Grashof. A busca de filtros mais adequados para cada uma das situações é condição necessária para obtenção de resultados para números de Grashof ainda maiores, como  $Gr = 10^7$ . Não obstante, a seleção de autovalores merece ainda alguma investigação no sentido de se encontrar processos alternativos de seleção. Esta questão está fortemente ligada à escolhas de filtros mais adequados.

Os resultados obtidos mostraram boa concordância com os disponíveis em literatura obtidos por RBF's (COLAÇO et al., 2009) e método do volume de controle (AL-NAJEM et al., 1998) em regime permanente. A observação a ser feita é com relação às taxas de

convergência para altos números de Grashof estudados, que ainda não se mostraram satisfatórias. Futuras investigações devem ser direcionadas ao procedimento de ordenamento para que se possa melhorar as taxas de convergência, reduzindo o número de termos nas ordens de truncamento, e por consequência, diminuindo o custo computacional. O interesse deste trabalho não foi abordar processos de ordenamento e seleção diferentes do utilizado, já que para os fins do presente trabalho os utilizados se mostraram suficientes.

Como sugestão para trabalhos futuros, sugere-se, propor processos alternativos de seleção e ordenamento de autovalores, reportar resultados benchmark para cavidades com razões de aspecto diferentes de um (cavidades retangulares) e cavidades com diferentes ângulos de inclinação em relação aos eixos “x-y” e. Por fim, fica evidente a necessidade das pesquisas, agora, serem direcionadas a situações com altos números de Grashof, visando o estudo de instabilidades na convecção e tendendo ao regime de escoamento turbulento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCHAAR, S.; VASSEUR, P.; BILGEN, E. Natural convection heat transfer in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field. **ASME Journal Heat Transfer**, vol. 117, p. 668-73, 1995a.

ALCHAAR, S.; VASSEUR, P.; BILGEN, E. The effect of a magnetic field on natural convection in a shallow cavity heated from below. **Chem. Eng. Comm.**, Vol. 134, p. 195-209, 1995b.

ALFVÉN, H. Discovery Alfvén waves. **Nature**, vol. 150, p. 405, 1942.

AL-NAJEM, N. M.; KHANAFER, K. M.; EL-REFAEE, M. M. Numerical study of laminar natural convection in tilted enclosure with transverse magnetic field. **Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow**, vol. 8, n. 6, p. 651-672, 1998.

BARAKOS, G.; MITSOULIS, E.; ASSIMACOPOULOS, D. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions. **Int. J. Numer. Methods Fluids**, vol. 18, p. 695-719, 1994.

COLAÇO, M. J.; DULIKRAVICH, G. S.; ORLANDE, H. R. B. Magnetohydrodynamic using radial basis functions. **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 52, p. 5932-5939, 2009.

CORMACK, D. G., LEAL, L. G.; IMBERGER, J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls: Part 1, asymptotic theory. **J. Fluid Mechanics**, vol. 65, p. 209-30, 1974.

CORRÊA, E. J.; COTTA, R. M.; ORLANDE, H. R. B. On the Reduction of Computational Costs in Eigentunction Expansions of Multidimensional Diffusion Problems. **Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow**, 1997.

COTTA, R. M. Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow. **CRC Press**, Boca Raton, FL, 1993.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **Heat Conduction – Lumped Analysis, Integral**

**Transforms.** Symbolic Computation, Wiley-Interscience, New York, 1997.

COWLING, T. G. Solar dynamo theory. **Mon. Not. Roy. Astr. Soc.**, vol. 94, p. 39, 1934.

DAVY, S. H..Magnetic field deflects arc.. **Phil. Trans. Roy. Soc.**, p. 427, 1821.

DE VAHL DAVIS, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. **Int. J. for Numer. Methods in Fluids**, vol. 3, p. 249-64, 1983.

DULIKRAVICH, G. S.; LYNN, S. R. Unified electro-magneto-fluid dynamics (EMFD): a survey of mathematical models. **Int. J. Non-Linear Mech.**, vol. 32, n. 5, p. 923-932, 1997.

FARADAY, M. Induced e.m.f.s and currents in moving liquids. **Phil. Trans. Roy. Soc.**, p. 163 et seq., 1832.

FERRARO, V. C. A. Behaviour of magnetic Field in rotating star.. **Mon. Not. Roy. Astr. Soc.**, vol. 97, p. 458, 1937.

GARANDET, J. P.; ALBOUSSIÈRE, T.; MOREAU, R. Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field. **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 35, n. 4, p. 741-748, 1992.

GRAY, D. D.; GIORGINI, A. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 19, p. 545-551, 1976.

HARTMANN, J. Mercury jet wave rectifier. **Journal Engineering**, vol. 124, p. 338 and 377, also vol. 132, p. 654, 1927.

HORTMANN, M.; PERIC, M.; SHEUERER, G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-Mark solutions. **Int. J. for Numerical Methods in Fluids**, vol. 11, p. 189-207, 1990.

HUNT, J. C. R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. **J. Fluid Mech.**, vol. 21, p. 577-590, 1965.

IMSL LIBRARY, **MATH/LIB.** Houston, TX, 1989.

LEAL, M. A. **Natural Convection in a Square Cavity for Steady-State and Transient Formulations: - The Integral Transform Method. 1996.** Tese (Doutorado em ciências) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1996.

LEAL, M. A. Natural convection in enclosures, in: R. M. Cotta (Ed.), *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*, **Begell House Inc.** New York, p. 375-395, 1998.

LEAL, M. A.; H. MACHADO; A.; COTTA, R. M. Integral Transform solutions of transient natural convection in enclosures with variable fluid properties. **Int. Journal of Heat and Mass Transfer**, vol. 43, p. 3977-3990 2000.

LEAL, M. A.; PÉREZ-GUERRERO, J. S.; COTTA, R. M. Natural convection inside two-dimensional cavities the integral transform method. **Comm. Num. Meth. Eng.**, vol. 15, p. 113-125, 1999.

LEDUC, L. MHD magnetometer. **J. Phys. Théor. Appl.**, 2<sup>o</sup> série, n. 6, p. 184, 1887.

MARKATOS, N. C.; PERICLEOUS, K. A. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 27, p. 772-5, 1984.

MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M. Ordering rules for double and triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. **Int. Comm. Heat and Mass Transfer**, vol. 23, p. 299-303, 1996.

MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified Analysis & Solutions of Heat and Mass Diffusion.** John Wiley & Sons, New York, 1984.

NEWELL, M. E.; SCHMIDT, F. W. Natural convection heat transfer in square enclosures. **J. Heat Transfer**, vol. 92, 1970.

OREPER, G. M.; SZEKELY, J. The effect of an external imposed magnetic field on buoyancy driven flow in a rectangular cavity. **J. Crystal Growth**, vol. 64, p. 505-515, 1983.

ÖZISIK, M. N., **Heat Conduction.** John Wiley, New York, 1984.

ÖZISIK, M. N.; MURRAY, R. L. On the Solution of Linear Diffusion Problems whit Variable Boundary Conditions Parameters. **J. Heat Transfer**, vol. 96, p. 48-51, 1974.

OZOE, H.; MARUO, K. Magnetic and gravitational natural convection of melted silicon – two dimensional numerical computations for the rate of heat transfer. **J.S.M.E.**, vol. 30, p. 774-84, 1987.

OZOE, H.; OKADA, K. The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubical enclosure. **Int. J. Heat Mass Transfer**, vol. 32, n. 10, p. 1939-54, 1989.

PÉREZ-GUERRERO, J. S. **Integral transformation of the Navier-Stokes equations for laminar flow in channels of arbitrary two-dimensional geometry**. 1995. Tese (Doutorado em Ciências) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 1995.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; COTTA, R.M. Integral Transform Method for Navier-Stokes Equations in Streamfunction-Only Formulation. **Int. J. Num. Meth. In Fluids**, vol. 15, p. 399-409, 1992.

PETERSEN, C. MHD generator. **U.S. Patent** 1443091, 1919.

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. **Numerical Recipes FORTRAN**. Cambridge University Press, 1992.

RAMASWANY, B.; JUE, T. C.; AKIN, J. E. Finite element analysis of oscillatory flow heat transfer inside a square cavity. **AIAA Journal**, vol. 30, n. 2, p. 412-422, 1992.

RITCHIE, W. Electromagnetic force propels liquid. **Phil. Trans. Roy. Soc.**, p. 294, 1832.

RUDRAIAH, N.; BARRON, R. M.; VENKATACHALAPPA, M.; SUBBARAYA, C. K. Effect of a magnetic field on free convection in a rectangular enclosure. **Int. J. Engng Sci.**, vol. 33, n. 8, p. 1075-84, 1995.

SAI, B. V. K. S.; SEETHAMARU, K. N.; NARAYANA, P. A. A. Solution of transient laminar natural convection in square cavity by an explicit finite element scheme. **Numerical Heat Transfer**, vol. 25 (A), p. 593-609, 1994.

SAITOH, T.; HIROSE, K. High-accuracy bench mark solutions to natural convection in a square cavity, **Computational Mechanics**, vol. 4, p. 417-427, 1989.

SHERCLIFF, J. A. **A Textbook of Magnetohydrodynamics**. Pergamon Press, Oxford –

London – Edinburgh - New York – Paris - Frankfurt, First edition, p. 1-8, 1965.

SHERCLIFF, J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. **Proc. Camb. Phil. Soc.**, vol. 49, p. 136-144, 1953.

SPRADLEY, L. W.; CHURCHILL, S. W. Pressure and buoyancy-driven thermal convection in rectangular enclosure. **J. Fluid Mech**, vol. 70, p. 705-720, 1975.

VASSEUR, P.; HASNAOUI, M.; BILGEN, E.; ROBILARD, L. Natural convection in an inclined fluid layer with a transverse magnetic field: analogy with a porous medium. **ASME Journal of Heat Transfer**, vol. 117, p. 121-129, 1995.

WOLFRAM, S. **MATHEMATICA – a system for doing mathematics by computer, in: The Advanced Book Program**. Addison Wesley, Reading, MA, 1991.

WILLIAMS, E. Flow in pipes under transverse magnetic field. **J. Proc. Phys. Soc.**, vol. 42, p. 466, 1930.



## APÊNDICE

### A.1 – MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA E ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Escrevendo a componente na direção “x” da equação do movimento:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \nu \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{A1.1.a})$$

Escrevendo a componente da direção “y” da equação do movimento:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \nu \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 v^* + \beta_T g_0 (T^* - T_0) \quad (\text{A1.1.b})$$

O terceiro termo do lado direito da equação (A1.1.b) é o termo da Força de Lorentz  $F_L$  e é definido como:

$$F_L = J \times B \quad (\text{A1.1.c})$$

Substituindo a Lei de Ohm’s na equação (A1.1.c), resulta:

$$F_L = J \times B = \sigma(V \times B) \times B \quad (\text{A1.1.d})$$

Fazendo a operação vetorial e considerando o campo magnético constante  $B_0$  na direção “x” positiva, a Força de Lorentz se resume a uma única componente “y” na direção negativa, logo:

$$F_L = -v^* B_0^2 \quad (\text{A1.1.e})$$

Da definição de função corrente bidimensional, temos;

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}; \quad v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (\text{A1.2.a-b})$$

Diferenciando as equações (A.1.1.a) e (A.1.1b.a) em relação à “x\*” e “y\*”, respectivamente, subtraindo uma da outra, e substituindo a definição de função corrente (A.1.2.a-b), resulta em:

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi^*)}{\partial t^*} - \frac{\partial(\psi^*, \nabla^2\psi^*)}{\partial(x^*, y^*)} = \nu\nabla^4\psi^* - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 \frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}} - \beta_T g_0 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (A1.3)$$

Escrevendo a equação da energia, desprezando os termos de dissipação viscosa e de efeito Joule:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha_T \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (A1.4.a)$$

Substituindo a definição de função corrente (A.1.2.a-b) em (A1.4.a), resulta em:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \alpha_T \nabla^2 T^* \quad (A1.4.b)$$

As condições de contorno e inicial são:

$$u^* = v^* = 0; \quad T^*(x, y, 0) = T_c \quad \text{em } t = 0 \quad (A1.5.a)$$

$$u^* = v^* = 0; \quad T^* = T_h \quad \text{em } x = 0 \quad (A1.5.b)$$

$$u^* = v^* = 0; \quad T^* = T_c \quad \text{em } x = L \quad (A1.5.c)$$

$$u^* = v^* = \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (A1.5.d)$$

$$u^* = v^* = \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = L \quad (A1.5.e)$$

Substituindo a definição de função corrente (A.1.2.a-b) em (A1.5.a-e), resulta em:

$$\psi^*(x, y, 0) = 0; \quad T^*(x, y, 0) = T_c \quad \text{em } t^* = 0 \quad (A1.6.a)$$

$$\psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0; \quad T^* = T_h \quad \text{em} \quad x^* = 0 \quad (\text{A1.6.b})$$

$$\psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0; \quad T^* = T_c \quad \text{em} \quad x^* = L \quad (\text{A1.6.c})$$

$$\psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em} \quad y^* = 0 \quad (\text{A1.6.d})$$

$$\psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em} \quad y^* = L \quad (\text{A1.6.e})$$

Os grupos adimensionais são:

$$x = \frac{x^*}{L}; \quad y = \frac{y^*}{L}; \quad \psi = \frac{\psi^*}{\alpha_T}; \quad t = \frac{\alpha_T t^*}{L^2}; \quad T = \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c} \quad (\text{A1.7.a-e})$$

Substituindo as equações (A1.7.a-e) em (A1.3) e (A1.4.b), resulta em:

$$\frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} + \text{Pr}(\nabla^4 \psi) - \text{Pr Ha}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \text{Ra Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{A1.8.a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(x, y)} \frac{\partial T}{\partial x} + \nabla^2 T \quad (\text{A1.8.b})$$

onde:

$$\text{Ha} = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \quad (\text{A1.9.a})$$

$$\text{Ra} = \frac{g_0 \beta_T (T_h - T_c) L^3}{\alpha_T \nu} \quad (\text{A1.9.b})$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_T} \quad (\text{A1.9.c})$$

$$\text{Gr} = \frac{g_0 \beta_T (T_h - T_c) L^3}{\nu^2} = \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \quad (\text{A1.9.d})$$

e os operadores associados são dados por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad ; \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (\text{A1.10.a-b})$$

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} \quad (\text{A1.10.c})$$

## A.2 – TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DOS SISTEMAS DE EDP's

Utilizando o operador  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) dy dx$  para aplicar a dupla transformação na equação do movimento (2.8.a) e abrindo os operadores vetoriais:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial t} dy dx}_{T_1} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} dy dx}_{T_2} + \\ & + \text{Pr} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \nabla^4 \psi dy dx}_{T_3} - \text{Pr Ha}^2 \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dy dx}_{T_4} + \\ & - \text{Ra Pr} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} dy dx}_{T_5} + \text{Ra Pr} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) dy dx}_{T_6} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.a})$$

Expandindo os termos ( $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  e  $T_6$ ) da equação (A2.1.a) e aplicando a fórmula de inversão:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dy dx + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dy dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j^*(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}_m^*(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j^*(x) dx \right) \underbrace{\left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right)}_{\delta_{\ell m}} \tilde{\psi}_{jm} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) dx \right)}_{\delta_{ij}} \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \tilde{\psi}'_{jm} = \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij\ell m} \tilde{\psi}'_{jm}
\end{aligned} \tag{A2.1.b}$$

onde:

$$A_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) dx \right) \delta_{\ell m} + \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \delta_{ij} \tag{A2.1.c}$$

e

$$\begin{aligned}
T_2 & = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) dy dx - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) dy dx = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} dy dx + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^3} dy dx - \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} dy dx - \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} dy dx = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}'_j(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}''_k(x) \tilde{Y}'_n(y) \tilde{\psi}_{kn} dy dx + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}'_j(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_k(x) \tilde{Y}'''_n(y) \tilde{\psi}_{kn} dy dx - \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}'_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}'''_k(x) \tilde{Y}_n(y) \tilde{\psi}_{kn} dy dx - \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}'_k(x) \tilde{Y}''_n(y) \tilde{\psi}_{kn} dy dx = \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}'_j(x) \tilde{X}''_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) \tilde{Y}'_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\psi}_{kn} + \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}'_j(x) \tilde{X}_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) \tilde{Y}'''_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\psi}_{kn} - \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) \tilde{X}'''_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}'_m(y) \tilde{Y}_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\psi}_{kn} - \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) \tilde{X}'_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}'_m(y) \tilde{Y}''_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\psi}_{kn} = \\
& = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{ijk\ell mn} - D_{ijk\ell mn}) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\psi}_{kn}
\end{aligned} \tag{A2.1.d}$$

onde:

$$\begin{aligned} C_{ijk\ell mn} = & \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j'(x) \tilde{X}_k''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) \tilde{Y}_n'(y) dy \right) + \\ & + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j'(x) \tilde{X}_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) \tilde{Y}_n''(y) dy \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.e})$$

$$\begin{aligned} D_{ijk\ell mn} = & \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) \tilde{X}_k'''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m'(y) \tilde{Y}_n'(y) dy \right) + \\ & + \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) \tilde{X}_k'(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m'(y) \tilde{Y}_n''(y) dy \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.f})$$

também:

$$\begin{aligned} T_3 = & \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} dy dx + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} dy dx + \\ & + 2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j^{iv}(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}_m^{iv}(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx + \\ & 2 \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j''(x) \tilde{Y}_m''(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \alpha_i^4 \tilde{\psi}_{jm} + \\ & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \alpha_m^4 \tilde{\psi}_{jm} + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m''(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} = \\ & = (\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4) \tilde{\psi}_{jm} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{ij\ell m} \tilde{\psi}_{jm} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.g})$$

onde:

$$B_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m''(y) dy \right) \quad (\text{A2.1.h})$$

e

$$\begin{aligned}
T_4 &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j''(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{E}_{ij\ell mn} \tilde{\psi}_{jm}
\end{aligned} \tag{A2.1.i}$$

onde:

$$\ddot{E}_{ij\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{X}_j''(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{Y}_m(y) dy \right) \tag{A2.1.j}$$

e

$$\begin{aligned}
T_5 &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \frac{\partial \theta}{\partial x} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j'(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{\phi}_j'(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm} = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{i\ell pr} \tilde{\theta}_{jm}
\end{aligned} \tag{A2.1.l}$$

onde:

$$F_{i\ell pr} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{\phi}_j'(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_r(y) dy \right) \tag{A2.1.m}$$

Finalmente:

$$T_6 = \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_\ell(y) dy \right) = G_{i\ell} \tag{A2.1.n}$$

Assim a equação

(2.8.a) transformada, fica:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{ij\ell m} \frac{d \tilde{\psi}_{jm}}{dt} &= \Pr(\alpha_i^4 + \alpha_\ell^4) \tilde{\psi}_{jm} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ 2 \Pr B_{ij\ell m} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{ijk\ell mn} - D_{ijk\ell mn}) \right] \tilde{\psi}_{kn} + \\
&- \Pr Ha^2 \ddot{E}_{ij\ell m} \tilde{\psi}_{jm} - \Pr Ra \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{i\ell pr} \tilde{\phi}_{jm} - G_{i\ell} \right]
\end{aligned} \tag{A2.1.p}$$

De maneira similar, utilizando o operador  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy dx$  para aplicar a dupla transformação na equação da energia (2.8.b) e abrindo os operadores vetoriais:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \theta}{\partial t} dy dx}_{T_7} &= \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} dy dx}_{T_8} + \\ &+ \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} dy dx}_{T_9} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \nabla^2 \theta dy dx}_{T_{10}} \end{aligned} \quad (A2.2.a)$$

Abrindo os termos ( $T_7$ ,  $T_8$ ,  $T_9$ , e  $T_{10}$ ) da equação (A2.2.a) e aplicando a fórmula de inversão:

$$\begin{aligned} T_7 &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \theta}{\partial t} dy dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}_j(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm} = \frac{\partial \tilde{\theta}_{jm}}{\partial t} \end{aligned} \quad (A2.2.b)$$

e

$$\begin{aligned} T_8 &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, y)} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} dy dx - \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}'_j(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}'_k(x) \tilde{\Gamma}'_n(y) \tilde{\theta}_{kn} dy dx - \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}'_m(y) \tilde{\psi}_{jm} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\phi}'_k(x) \tilde{\Gamma}_n(y) \tilde{\theta}_{kn} dy dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}'_j(x) \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}'_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}'_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\theta}_{kn} - \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_j(x) \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}'_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}'_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_n(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\theta}_{kn} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( H_{ijk\ell mn} - I_{ijk\ell mn} \right) \tilde{\psi}_{jm} \tilde{\theta}_{kn} \end{aligned} \quad (A2.2.c)$$



onde:

$$\mathbf{H}_{ijk\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_j(x) \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_n(y) dy \right) \quad (\text{A2.2.d})$$

$$\mathbf{I}_{ijk\ell mn} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_j(x) \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}_k(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_n(y) dy \right) \quad (\text{A2.2.e})$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_9 &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial \psi}{\partial y} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_j(x) \tilde{Y}_m(y) \tilde{\psi}_{jm} dy dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_j(x) \tilde{\phi}_1(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy \right) \tilde{\psi}_{jm} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{J}_{ij\ell m} \tilde{\psi}_{jm} \end{aligned} \quad (\text{A2.2.f})$$

onde:

$$\mathbf{J}_{ij\ell m} = \left( \int_0^1 \tilde{X}_j(x) \tilde{\phi}_1(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{Y}_m(y) \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy \right) \quad (\text{A2.2.g})$$

finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{10} &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \nabla^2 \theta dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dy dx + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -\beta_i^2 \tilde{\phi}_j(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx + \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) - \beta_\ell^2 \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm} dy dx = \\ &= -\beta_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}_j(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm} - \\ &+ \beta_\ell^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_1(x) \tilde{\phi}_j(x) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm} = \\ &= -(\beta_i^2 + \beta_\ell^2) \tilde{\theta}_{jm} \end{aligned} \quad (\text{A2.2.h})$$

Assim a equação (2.9.b) transformada, fica:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{jm}}{dt} = -(\beta_i^2 + \beta_\ell^2)\tilde{\theta}_{jm} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (H_{ijk\ell mn} - I_{ijk\ell mn}) \tilde{\theta}_{kn} + J_{ij\ell m} \right] \tilde{\psi}_{jm} \quad (\text{A2.2.i})$$

Utilizando os dois operadores  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) dy dx$  e  $\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy dx$  para aplicar a dupla transformação na condição inicial (2.9.a-b), resulta em:

$$\psi(x, y, 0) = 0 \quad (\text{A2.3.a})$$

$$\tilde{\psi}_{i\ell}(0) = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{Y}_\ell(y) \psi(x, y, 0) dy dx = 0 \quad (\text{A2.3.b})$$

e

$$\theta(x, y, 0) = x - 1 \quad (\text{A2.3.c})$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) \theta(x, y, 0) dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_\ell(y) (x - 1) dy dx \quad (\text{A2.3.d})$$

$$\tilde{\theta}_{i\ell}(0) = \left( \int_0^1 \tilde{\phi}_i(x) (x - 1) dx \right) \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_\ell(y) dy \right) = \tilde{f}_{i\ell} \quad (\text{A2.3.e})$$

### A.3 – NÚMEROS DE NESSELT

#### A.3.1 – NÚMERO DE NESSELT LOCAL

Definido a partir de:

$$\text{Nu}_M = - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (\text{A3.1.a})$$

levando-se em consideração o filtro (2.7.a-b):

$$T(x, y, t) = 1 - x + \theta(x, y, t) \quad (\text{A3.1.b})$$

$$\text{Nu}_M = 1 - \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (\text{A3.1.c})$$

e ao se substituir a fórmula da inversa (2.28.b):

$$\theta(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_{\ell}(y) \tilde{\theta}_{i\ell}(t) \quad (\text{A3.1.d})$$

resulta em:

$$\text{Nu}_M = 1 - \sum_{i=1}^{\text{NT}} \sum_{\ell=1}^{\text{NT}} \left. \frac{d\tilde{\phi}_i}{dx} \right|_{x=0} \tilde{\Gamma}_{\ell}(y) \tilde{\theta}_{i\ell}(t) \quad (\text{A3.1.e})$$

então:

$$\text{Nu}_M = \text{Nu}_M(y, t) = f(y, t) \quad (\text{A3.1.f})$$

A autofunção é  $\tilde{\phi}_i(x)$  é conhecida como:

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\text{sen}(\beta_i x)}{\sqrt{N_{x_p}}}; \quad \beta_i = i\pi \quad (\text{A3.1.g})$$

Diferenciando em relação a “x” e avaliando a diferencial em “x=0”, resulta em:

$$\left. \frac{d\tilde{\phi}_i}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{2i}\pi; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A3.1.h})$$

### A.3.2 – NÚMERO DE NESSELT MÉDIO

Definido como:

$$\text{Nu}_x = \int_0^1 \left[ u(x, y, t) T(x, y, t) - \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right] dy, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A3.2.a})$$

levando-se em consideração o filtro (2.7.a-b):

$$T(x, y, t) = 1 - x + \theta(x, y, t) \quad (\text{A3.2.b})$$

$$-\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A3.2.c})$$

$$T(x, y, t) = 1 - x + \theta \quad (\text{A3.2.d})$$

Da definição de função corrente (A1.2.a-b); temos:

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (\text{A3.2.e})$$

e ao se substituir a fórmula da inversa (2.28.b) e (2.29.b):

$$-\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\phi}_i(x)}{dx} \tilde{\Gamma}_{\ell}(y) \tilde{\theta}_{i\ell}(t) \quad (\text{A3.2.f})$$

$$T(x, y, t) = 1 - x + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{\phi}_i(x) \tilde{\Gamma}_{\ell}(y) \tilde{\theta}_{i\ell}(t) \quad (\text{A3.2.g})$$

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \frac{d\tilde{Y}_{\ell}}{dy}(y) \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \quad (\text{A3.2.h})$$

então o número de Nusselt médio fica:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= \int_0^1 \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \frac{d\tilde{Y}_{\ell}}{dy}(y) \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \left( 1 - x + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm}(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} \tilde{\Gamma}_m(y) \tilde{\theta}_{jm}(t) \right] dy = (1-x) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \overbrace{\left( \int_0^1 \frac{d\tilde{Y}_{\ell}}{dy}(y) dy \right)}{=0} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(x) \left( \int_0^1 \frac{d\tilde{Y}_{\ell}}{dy}(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm}(t) \right] \tilde{\psi}_{i\ell}(t) + \\ &+ 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} \left( \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(y) dy \right) \tilde{\theta}_{jm}(t) \end{aligned} \quad (\text{A3.2.i})$$

ou ainda:

$$\text{Nu}_x = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{\phi}_j(x) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) K_{\ell m} \tilde{\psi}_{i\ell}(t) - \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} f_m \right] \tilde{\theta}_{jm}(t) \quad (\text{A3.2.j})$$

onde:

$$f_m = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_m(y) dy \quad (\text{A3.2.l})$$

$$K_{\ell m} = \int_0^1 \frac{d\tilde{Y}_\ell}{dy}(y) \tilde{\Gamma}_m(y) dy \quad (\text{A3.2.m})$$

Por analogia, prova-se em (A3.3.e) que:

$$\int_0^1 \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} dx = \int_0^1 \frac{d\tilde{Y}_\ell}{dy}(y) dy = 0 \quad (\text{A3.2.n})$$

### A.3.3 – NÚMERO DE NESSELT GLOBAL

É dado por:

$$\bar{Nu} = \int_0^1 Nu_x dx \quad (\text{A3.3.a})$$

Substituindo (A3.2.j) em (A3.3.a), resulta:

$$\begin{aligned} \bar{Nu} &= \int_0^1 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{\phi}_j(x) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) K_{\ell m} \tilde{\psi}_{i\ell}(t) - \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} f_m \right] \tilde{\theta}_{jm}(t) \right] dx = \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{\phi}_j(x) dx \right) K_{\ell m} \tilde{\psi}_{i\ell}(t) + \overbrace{\int_0^1 \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} dx}^{=0} f_m \right) \tilde{\theta}_{jm}(t) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} J_{ij} K_{\ell m} \tilde{\psi}_{i\ell}(t) \right) \tilde{\theta}_{jm}(t) \end{aligned} \quad (\text{A3.3.b})$$

onde:

$$J_{ij} = \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \tilde{\phi}_j(x) dx \quad (\text{A3.3.c})$$

A diferencial da autofunção  $\frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx}$  em relação à “x” é:

$$\frac{d\tilde{\phi}_j}{dx} = \frac{\beta_j \cos(\beta_j x)}{\sqrt{N_{x_p}}}; \quad \beta_j = j\pi; \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A3.3.d})$$

Integrando, prova que:

$$\int_0^1 \frac{d\tilde{\phi}_j(x)}{dx} dx = \frac{\beta_j}{\sqrt{N_{x_p}}} [\text{sen}(\beta_j x)]_0^1 = 0; \quad \beta_j = j\pi; \quad j=1,2,3,\dots \quad (\text{A3.3.e})$$