



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

WANDERSON SILVA RODRIGUES

**SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA EM CORPOS COM GEOMETRIA
ESFEROIDAL USANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL
GENERALIZADA**

BELÉM
2011



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

WANDERSON SILVA RODRIGUES

**SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA EM CORPOS COM GEOMETRIA
ESFEROIDAL USANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL
GENERALIZADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

**Orientadores: Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo**

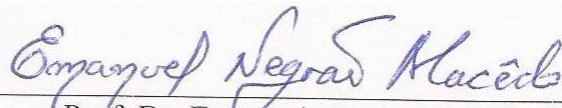
BELÉM
2011

WANDERSON SILVA RODRIGUES

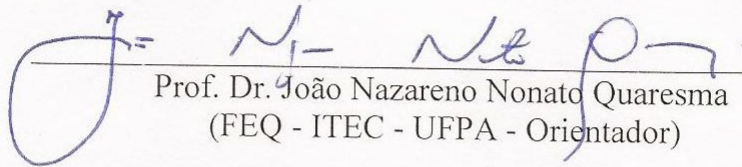
**SOLUÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURA EM CORPOS COM GEOMETRIA
ESFEROIDAL USANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL
GENERALIZADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

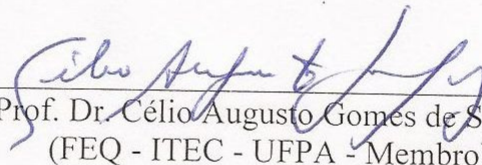
BANCA AVALIADORA



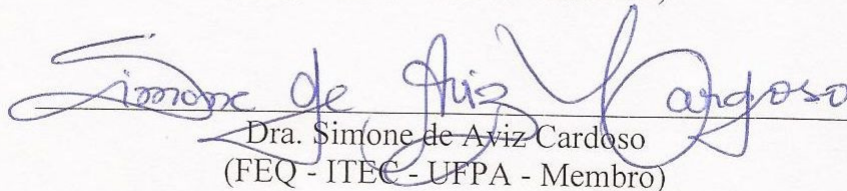
Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo
(FEQ - ITEC - UFPA - Orientador)



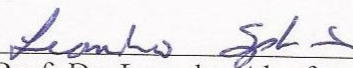
Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
(FEQ - ITEC - UFPA - Orientador)



Prof. Dr. Célio Augusto Gomes de Souza
(FEQ - ITEC - UFPA - Membro)



Dra. Simone de Aviz Cardoso
(FEQ - ITEC - UFPA - Membro)



Prof. Dr. Leandro Alcoforado Sphaier
(TEM/PGMEC - UFF - Membro)

BELÉM
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química

Rodrigues, Wanderson Silva

Solução do campo de temperatura em corpos com geometria esferoidal usando a técnica da transformada integral generalizada / Wanderson Silva Rodrigues; orientadores, João Nazareno Nonato Quaresma e Emanuel Negrão Macêdo. – Belém - 2011

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2011

1. Calor- transferência 2 . Transformadas integrais 3. Difusão em sólidos I. Título

CDD 22.ed. 621.4022

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo que tem feito na minha vida.

A minha família, em especial aos meus pais Janari Barreto Rodrigues, Eldely do Socorro Maués e Antonia Miranda por toda ajuda em todas as horas.

Ao meu grande avô Wilson Parentes Rodrigues (*in memoriam*), exemplo de vida, carinho e honestidade.

Ao Professor João Nazareno pela confiança depositada em mim e pela orientação, dedicação e empenho.

Ao Professor Emanuel Negrão pela orientação, dedicação e pela grande amizade.

Ao Professor Célio Augusto e Dra. Simone de Aviz pela orientação e contribuições imprescindíveis para a conclusão deste trabalho.

A minha querida Aline Sampaio por todo seu apoio, companheirismo, amizade, carinho e amor.

Ao meu grande amigo Jean Jorge Gomes da Silva pela sua grande amizade, companheirismo em uma etapa da minha vida.

Aos amigos da graduação, mestrado e doutorado em especial aos alunos do Laboratório de Simulação de Processo.

À Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é empregada na solução de problema difusivo transiente em domínio irregular representados por sólidos esferoidais prolatos e oblatos. O modelo matemático utilizado para simular o fenômeno da difusão de calor em regime transiente considera o meio difusivo com propriedades termofísicas constantes, sem geração interna de calor e a equação de condução de calor em coordenadas cilíndricas bidimensional. A modelagem matemática do problema é realizada assumindo que a superfície dos esferóides é descrita por uma função geral e sujeita a condições de contorno de primeira espécie (condição de Dirichlet) e terceira espécie (condição convectiva). Para a obtenção da solução aplica-se a GITT sobre a equação de difusão de calor para remoção das derivadas parciais de segunda ordem, como resultado desta transformação obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias para o potencial transformado que é solucionado através da subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1991). O modelo é capaz prever a transferência interna de calor no interior do sólido, bem como perfil do campo de temperatura e temperatura média ao longo do processo. A solução para o campo de temperatura foi obtida através da aplicação da GITT de tal forma que vários casos foram estudados através da variação da razão de aspecto (γ) do corpo de forma elipsoidal. O modelo usado neste trabalho é muito abrangente, flexível e permite sua aplicação em geometrias que varia de $0 < \gamma < 1$ (esferóide oblato) até $\gamma > 1$ (esferóide prolato). Os resultados obtidos para campo de temperatura através da solução proposta para os sólidos esferoidais com diferentes razões de aspecto foram comparados com outros disponíveis na literatura para situações semelhantes e foram excelentes.

Palavra - chave: Sólido Esferoidal, Domínio irregular, Difusão de calor, Transformação Integral Generalizada (GITT)

ABSTRACT

In this paper the Generalized Integral Transform Technique (GITT) is employed in the solution of transient diffusion problem in the area represented by irregular solid prolate spheroid and oblate. The mathematical model used to simulate the phenomenon of heat diffusion in the transient regime considers the diffusive medium with constant thermophysical properties, without internal heat generation and heat conduction equation in two-dimensional cylindrical coordinates. Mathematical modeling of the problem is performed assuming that the surface of the spheroid is described by a general and subject to boundary conditions of first kind (Dirichlet condition) and the third kind (convection condition). To obtain the solution applies to GITT on the heat diffusion equation for removal of the second order partial derivatives, as a result of this transformation we obtain a system of ordinary differential equations for the transformed potential which is solved by the subroutine DIVPAG IMSL Library (1991). The model can predict the internal heat transfer inside the solid and field profile of temperature and average temperature throughout the process. The solution for the temperature field was obtained by applying the GITT so that several cases were studied by varying the aspect ratio (γ) of the body of ellipsoidal shape. The model used in this work is very comprehensive, flexible and allows its application in geometries ranging from $0 < \gamma < 1$ (oblate spheroid) to $\gamma > 1$ (prolate spheroid). The results for the temperature field through the solution proposed for the solid spheroid with different aspect ratios were compared with those available in literature for similar situations and were excellent.

Keywords: Solid Spheroidal, Domain irregular, Diffusion of heat, Generalized Integral Transformation (GITT)

NOMENCLATURA

A_i	Coeficiente Integral definido na Eq. (3.28)
A_{ijkl}	Coeficiente Integral definido na Eq. (3.49)
B_{ik}	Coeficiente Integral definido na Eq. (3.33)
B_{ijkl}	Coeficiente Integral definido na Eq. (4.27)
C_p	Calor específico do corpo
\tilde{f}_{ik}	Coeficiente Integral definido nas Eqs. (3.51) e (4.29)
\tilde{g}_{ik}	Coeficiente Integral definido na Eqs. (3.56.b) e (4.43.b)
h	Coeficiente de transferência por convecção
J_0	Função de Bessel de primeira espécie e de ordem zero
K	Condutividade térmica do corpo isotrópico
L	Comprimento focal da Figura 3.1
L_1 e L_2	Semi-eixo menor e maior, respectivamente
M_i	Integral de normalização na direção radial
N_k	Integral de normalização na direção axial
NT	Número de termos usados para computar o potencial
\vec{Q}	Fluxo térmico por condução
\vec{Q}_c	Fluxo térmico por convecção
\vec{Q}_η	Fluxo térmico na direção η
Q_g	Geração interna de calor
r	Coordenada radial, dimensional
R	Coordenada radial, adimensional
T	Tempo dimensional
T_0	Temperatura inicial do sólido
T_f	Temperatura no fluido
T_s	Temperatura na superfície do sólido
$T(r, z, t)$	Campo de temperatura dimensional.
Y_0	Função de Bessel de segunda espécie e de ordem zero
Z	Coordenada axial, dimensional
Z	Coordenada axial, adimensional

Letras Gregas

α	Difusividade térmica
β_i	Coefficiente definido na Eq. (3.18.c)
γ	Razão de aspecto do esferóide
ρ	Massa específica
δ_{ij}	Coefficiente Integral definido nas Eqs. (3.45) e (4.24)
δ_{kl}	Coefficiente Integral definido na Eq. (3.50.b)
θ	Campo de temperatura adimensional
$\bar{\theta}_{ik}(\tau)$	Transformada integral do campo de temperatura adimensional
$\theta_{av}(\tau)$	Temperatura média adimensional
λ_k	Autovalor na direção axial
$\mu_i(Z)$	Autovalor na direção radial
Φ_k	Autofunção na direção axial
ψ_i	Autofunção na direção radial
τ	Tempo adimensional
∇T	Gradiente de temperatura

Subscrito e Sobrescrito

i	Índice do autovalor na direção radial
k	Índice do autovalor na direção axial
p	Índice simples usado para reorganizar os índices i e k para o campo de temperatura
q	Índice simples usado para reorganizar os índices j e l para o campo de temperatura

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 2

Tabela 2.1- Propriedades termofísicas da banana.	13
---	----

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 0,5$ em ($Z = 0,05$).....	43
--	----

Tabela 5.2 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 0,7$ em ($Z = 0,07$).....	44
--	----

Tabela 5.3 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 1,0$ em ($Z = 0,1$).	45
--	----

Tabela 5.4 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 3,0$ em ($Z = 0,3$).....	46
---	----

Tabela 5.5 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 5,0$ em ($Z = 0,5$).....	47
--	----

Tabela 5.6 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal prolato com $\gamma = 1,0$ e $Bi = 0,1$ em ($Z = 0,1$).	63
---	----

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 2

- Figura 2. 1 - Esquema de um sólido de revolução.....4
- Figura 2. 2 – Classificação dos Esferóides: (a) Esferóides prolato e (b) Esferóides oblato.....5
- Figura 2.3 – Fluxograma das etapas para resolução de EDPs através da GITT 16

CAPÍTULO 3

- Figura 3.1– Geometria Elipsoidal Prolata (a) e Oblata (b) considerada no problema de condução de calor com condição de contorno de primeira espécie..... 17

CAPÍTULO 4

- Figura 4.1 – Geometria Elipsoidal Prolata (a) e Oblata (b) considerada no problema de condução de calor com condição de contorno convectiva na superfície..... 32

CAPÍTULO 5

- Figura 5.1– Comparação do campo de temperatura no centro dos sólidos esferoidais prolatos com diferentes razões de aspecto que varia de 1,0 a ∞ obtidos pela GITT e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966). 48
- Figura 5.2 – Comparação do campo de temperatura no ponto focal dos sólidos esferoidais prolatos com razão de aspecto que varia de 1,0 a ∞ , obtidos pela GITT e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966). 49
- Figura 5.3 – Comparação do campo de temperatura no centro do sólido esferoidal oblato com $\gamma = 0,5$, obtidos pela GITT e por Carmo e Lima (2008). 50

Figura 5.4 – Temperatura média adimensional para vários sólidos esferoidais com razão de aspecto que varia entre $\gamma = 0,2$ a $\gamma = \infty$	51
Figura 5.5 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,5$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$	52
Figura 5.6 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,5$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$	53
Figura 5.7 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,7$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$	54
Figura 5.8 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide oblato ($\gamma = 0,7$) em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$	55
Figura 5.9 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 1,0$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$	56
Figura 5.10 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 1,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$	56
Figura 5.11 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 2,0$ em função da coordenada R para vários tempos adimensionais e $Z = 0$	57
Figura 5.12 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 2,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$	58
Figura 5.13 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 5,0$ em função da coordenada R para vários tempos adimensionais e $Z = 0$	59
Figura 5.14 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 5,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$	60
Figura 5.15 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide oblato ($\gamma = 0,5$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,02$ (a) e $\tau = 0,06$ (b)	61
Figura 5.16 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma = 1,0$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,02$ (a) e $\tau = 0,06$ (b)	62

Figura 5.17 – Comparação do campo de temperatura no centro do sólido esferoidal prolato com $\gamma = 1,0$ e $Bi = 10^4$, obtidos pela GITT e por Carmo e Lima (2008).	64
Figura 5.18 – Distribuição da temperatura média adimensional em função do tempo adimensional para vários números de Biot ($Bi = 0,1; 1,0; 10^4$) em um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto ($\gamma = 1,0$).	65
Figura 5.19 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma = 2,0$) e número de Biot ($Bi = 10^4$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,06$ (a), $\tau = 0,12$ (b) e $\tau = 0,16$ (b).	66
Figura 5.20 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma = 5,0$) e número de Biot ($Bi = 10^4$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,06$ (a), $\tau = 0,14$ (b) e $\tau = 0,18$ (b).	67

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	1
1.2 – SÍNTESE DO TRABALHO.....	3
CAPÍTULO 2 – REVISAO BIBLIOGRAFICA	4
2.1 – ELIPSÓIDES DE REVOLUÇÃO.....	4
2.2 – MECANISMO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	5
2.2.1 – Condução	6
2.2.2 – Convecção	6
2.2.3 – Radiação	7
2.3 – EQUAÇÃO. GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR	8
2.4 – DIFUSÃO EM SÓLIDOS DE GEOMETRIA ESFEROIDAL.....	8
2.5 – PROPRIEDADE TERMOFÍSICAS DE SÓLIDOS ESFEROIDAIS	12
2.6 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....	13
CAPÍTULO 3 – PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE	17
3.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	17
3.2 – GRUPOS ADIMENSIONAIS	18
3.3 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA EQ. DE CONDUÇÃO DE CALOR UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	20
3.3.1 – Problema de Autovalor.....	20
3.3.2 – Determinação do Par Transformada - Inversa.....	24
3.3.3 – Transformação Integral	26
CAPÍTULO 4 – PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE	32
4.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	32
4.2 – GRUPOS ADIMENSIONAIS	34
4.3 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA EQ. DE CONDUÇÃO DE CALOR UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	35
4.3.1 – Problema de Autovalor.....	35
4.3.2 – Determinação do Par Transformada - Inversa.....	38
4.3.3 – Transformação Integral	38

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO	42
5.1 – PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE	42
5.1.1 – ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA E VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS	42
5.2 – PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE	62
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES	69
REFERÊNCIAS	71

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os objetivos, síntese do trabalho e os motivos que levaram ao estudo da condução de calor em sólidos com geometria elipsoidal oblata e prolata utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

1.1 - MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O conhecimento do problema de difusão de calor em regime transiente no interior de um corpo sólido é importante, pois permite a compreensão desse mecanismo de transferência de calor que é bastante utilizado nos processos industriais. O fenômeno de transferência de calor é bastante difundido na engenharia, pois tem um papel fundamental nos projetos de equipamentos, além da sua importância nos processos de secagem. As operações de secagem são bastante utilizadas nas indústrias químicas, indústria de processamento de alimentos e nos métodos de armazenamento de grãos e outros produtos biológicos de importância econômica.

Durante a secagem de produtos biológicos ocorrem variações de suas características físicas, químicas e biológicas, nas quais podem causar sua perda ou inutilidade para uma determinada função. Dessa forma o conhecimento da transferência de calor no decorrer do processo de secagem torna-se importante em virtude das alterações ocorridas nas propriedades químicas e biológicas do material, visto que uma maior quantidade de calor transferido afeta sensivelmente os fenômenos de transferência de massa principalmente em alimentos.

A transferência de calor no interior de um corpo sólido se dá por condução, de tal forma que esse modo de transferência de calor está relacionada ao transporte de energia das partículas mais energéticas para as partículas menos energéticas, em um meio, devido a interações entre elas. Esta interação ocorre quando dois sistemas que apresentam temperaturas diferentes são colocados em contato térmico e na presença de um gradiente de temperatura ocorre a transferência de calor por condução no sentido da diminuição da temperatura.

Modelar o fenômeno de difusão de calor em um corpo sólido é algo muito complexo em virtude dos vários fatores envolvidos tais como: geometrias dos corpos, condições de contorno na superfície, parâmetros físicos variáveis, condições ambientais externa na vizinhança do sólido e equações diferenciais complexas. A solução de problemas difusivos e difusivos-convectivos sempre representou um desafio para a engenharia, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que regem as equações governantes são de natureza complexa. Durante algum tempo as técnicas analíticas clássicas, como por exemplo, a técnica de separação de variáveis foi aplicada com sucesso em problemas que apresentavam estruturas matemáticas mais simples. Assim, diante da necessidade de se obter solução mais precisa para modelos físicos mais complexos e realísticos as técnicas híbridas analítico-númericas surgiram como uma proposta de tratamento para os problemas difusivos.

As técnicas analítico-númericas vêm ganhando destaque em diversas áreas por garantirem maior confiabilidade dos resultados por elas obtidos. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT (COTTA, 1993), é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser eficiente na solução de problemas de transferência de calor e massa, os quais, geralmente não apresenta solução via técnicas analíticas clássicas. Além do mais a GITT vem sendo aplicada em problemas puramente difusivo tais como aqueles que apresentam domínios de geometria irregulares ou não convencional e problemas difusivos tridimensional e não lineares.

Neste sentido, o objetivo do presente trabalho é a obtenção da solução do campo de temperatura via Técnica da Transformada Integral Generalizada para problema bidimensional de difusão de calor em regime transiente em corpos esferoidais prolatos e oblatos submetidos a condições contorno de primeira espécie e terceira espécie. Na formulação do problema consideram-se meios difusivos com propriedades termofísicas constante, temperatura inicial uniforme, sem geração interna de calor, superfície solida sendo descrita por uma função geral e emprego do sistema de coordenadas cilíndricas para a modelagem do problema. As Soluções para o campo de temperatura foram obtidas através da aplicação da GITT na equação de difusão de calor em coordenadas cilíndricas, de tal forma que vários casos foram estudados através da variação da razão de aspecto (γ) do corpo de forma elipsoidal. O modelo usado neste trabalho é muito abrangente, flexível e permite sua aplicação em geometrias que varia de $0 < \gamma < 1$ (esferóide oblato) até $\gamma > 1$ (esferóide prolato). Os resultados obtidos para campo de

temperatura através da solução proposta para os sólidos esferoidais com diferentes razões de aspecto foram comparados com outros disponíveis na literatura para situações semelhantes.

1.2 - SÍNTESE DO TRABALHO

No Capítulo 2, será apresentada a revisão bibliográfica, que abordará os seguintes assuntos: elipsóides de revolução e esferóides, descrição das contribuições da literatura que serviram como base para estudo de difusão de calor em sólidos de geometria elipsoidal, a Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT).

No Capítulo 3, será definido o problema de condução de calor submetido à condição de contorno de primeira espécie (temperatura prescrita), bem como sua formulação matemática e solução que foi realizada através da Técnica de Transformada Integral (GITT).

No Capítulo 4, será definido o problema de condução de calor submetido à condição de contorno de terceira espécie (convecção na superfície), bem como sua formulação matemática e solução que foi realizada através da Técnica de Transformada Integral (GITT).

No Capítulo 5, analisaremos e discutiremos os resultados obtidos que serão apresentados através de tabelas e gráficos, analisaremos o campo de temperatura para os sólidos elipsoidal com diferentes razões de aspecto em função das coordenadas radial e axial e compararemos estes resultados com resultados reportados na literatura.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões do trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma revisão dos trabalhos selecionados na literatura utilizados como base para o desenvolvimento deste estudo. Inicialmente, apresenta-se uma definição dos elipsóides de revolução e da difusão de calor no interior do sólido. Em seguida, são apresentadas as principais contribuições encontradas na literatura voltadas para problema de difusão de calor em corpos com forma elipsoidal e por fim abordaremos sobre a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

2.1 – ELIPSÓIDES DE REVOLUÇÃO

Segundo MUNEN e FOULIS (1982), sólidos de revolução são formados da seguinte maneira; seja R uma região plana admissível e seja l uma linha reta que esta no mesmo plano de R , mas sem tocar em R a não ser em pontos da fronteira de R , conforme mostrado na Figura 2.1.

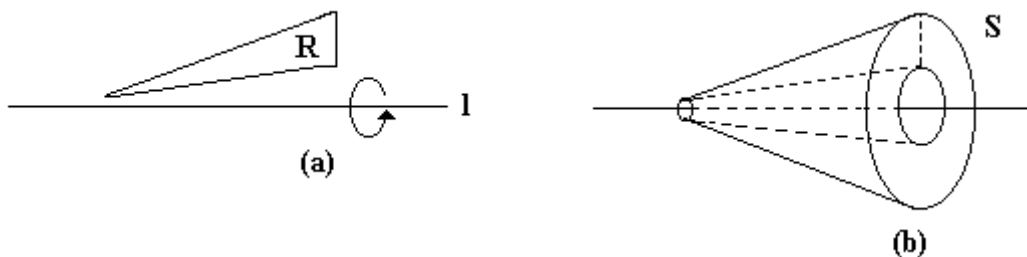


Figura 2.1 - Esquema de um sólido de revolução.

O sólido S é gerado quando R é girado em torno da linha l como um eixo, sendo S chamado de Sólido de Revolução (Figura 2.1b). A curva plana é chamada curva geratriz e a reta fixa é o eixo da superfície de revolução.

Dessa forma os elipsóides de revolução são sólidos gerados quando giramos uma elipse em torno de uma reta que contém o seu centro. A Figura 2.2 mostra um sólido elíptico obtido por rotação da elipse em torno de x e y .

Os elipsóides de revolução apresentam uma classificação conforme o seu eixo de revolução. Considerando o eixo y como sendo o eixo de revolução, e se esse for maior

que o eixo z , o elipsóide de revolução é classificado como elipsóide de revolução do tipo achatado ou esferóide oblato, Figura 2.2b. Caso contrário, se eixo y for menor que o eixo z , o elipsóide é classificado como elipsóide alongado ou esferóide prolato, Figura 2.2a.

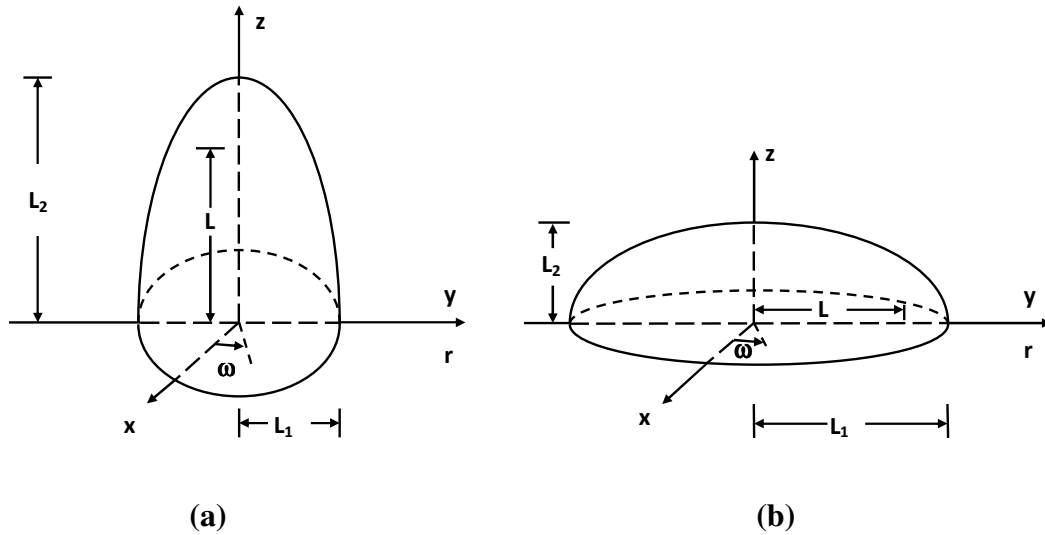


Figura 2.2 – Classificação dos Esferóides:(a) Esferóides prolato e (b) Esferóides Oblato.

2.2 - MECANISMOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Os fenômenos de transferência de calor desempenham um papel importante em muitos processos industriais que envolvam resfriamento (ou aquecimento) em processo difusivos em meio sólido. Essa transferência de calor é a energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperatura, ou seja, sempre que existir uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios diferentes ocorre necessariamente o fenômeno de transferência de calor.

Existem três modos diferentes para a transferência de calor de uma fonte para um receptor, embora na maior parte dos problemas físicos de aplicações na engenharia ocorram combinações de dois ou três destes modos. Estes modos de transferência de calor denominam-se condução, convecção e radiação.

2.2.1 – Condução

Na condução, o calor pode ser conduzido através de sólidos, líquidos e gases pela cinética de impacto direto de moléculas adjacentes de tal forma que a transferência de energia ocorre das partículas mais energéticas para as partículas de menor energia devido à interação entre elas. Além do mais o fluxo de energia não é acompanhado por um movimento apreciável de matéria. Para a condução de calor, a Eq. da taxa de transferência de calor é conhecida como lei de Fourier.

Sabendo-se que o fluxo de calor é uma grandeza vetorial, podemos escrever uma forma mais geral a equação de condução de calor (lei de Fourier) da seguinte forma:

$$\vec{Q} = -K\nabla T \quad (2.1)$$

O sinal negativo é devido ao fluxo térmico estar no sentido contrário ao gradiente de temperatura.

onde \vec{Q} é o fluxo térmico por condução; K é a condutividade térmica; ∇T é o gradiente de temperatura.

Generalizando, uma forma de se escrever a lei de Fourier é:

$$\vec{Q}_\eta = -K\nabla T \quad (2.2)$$

onde \vec{Q}_η é o fluxo térmico na direção η .

2.2.2 – Convecção

A transferência de calor por convecção é composto de dois mecanismos. Além da transferência de calor devido ao movimento aleatório molecular (difusão), a energia também é transferida através do movimento global do fluido. Esse movimento do fluido é associado ao fato de que, em qualquer instante, um grande número de moléculas esta

se movimentando coletivamente ou na forma de agregados de moléculas. Este movimento, na presença de uma gradiente de temperatura, contribui para a transferência de calor.

O Fluxo de calor por convecção é calculada pela Lei de Newton do Resfriamento conforme a equação abaixo:

$$\vec{Q}_c = h(T_s - T_f) \quad (2.3)$$

onde \vec{Q}_c é o fluxo de calor por convecção; h é o coeficiente de transferência por convecção; T_s é a temperatura da superfície; T_f é a temperatura do fluido.

2.2.3 – Radiação

A radiação é a forma de transferência de energia emitida pela matéria, sob a forma de ondas eletromagnéticas (fótons), devido alterações nas configurações eletrônicas de átomos ou moléculas. Enquanto a transferência de calor por condução ou convecção requer a presença de um meio material, a radiação não necessita dele. Na realidade, a transferência por radiação ocorre de forma mais eficiente no vácuo.

A radiação envolve a transmissão de energia radiante de uma fonte para um receptor. Quando a radiação emana de uma fonte para um receptor, uma parte da energia é absorvida e outra parte é refletida pelo receptor. Com base na 2ª lei da termodinâmica, Boltzmann verificou que o fluxo de calor emitido por uma fonte é dada por:

$$\vec{Q}_r = \sigma \epsilon T^4 \quad (2.4)$$

onde Q_r é o fluxo de calor por radiação; σ é a constante de Stefan- Boltzmann ($\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{k}$); ϵ é a emissividade do meio (adimensional, variando de 0 a 1); T é a temperatura absoluta da superfície da fonte

Um caso especial, que ocorre com frequência, envolve a troca de radiação entre uma superfície pequena a T e uma superfície isotérmica a T_v , muito maior, que envolve

completamente a menor. Se a superfície considerada apresenta ε , o fluxo de calor emitido por radiação a partir da superfície é dado por:

$$\vec{Q}_r = \sigma \varepsilon (T^4 - T_v^4) \quad (2.5)$$

2.3 – EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR

A Lei de Fourier tem sido usada para descrever o processo de transferência de calor dentro do sólido em virtude do gradiente de temperatura ser a força motriz do processo e com isso considera-se que difusão de energia é o único mecanismo de transporte de calor no interior do sólido.

Para os problemas de condução de calor transiente no interior do sólido a equação governante do problema físico é expressa pela Equação Geral de Condução de Calor. Esta equação se fundamenta na 1ª Lei da Termodinâmica ou princípio da Conservação de Energia, sendo escrita em coordenadas cilíndricas para o caso bidimensional da seguinte forma:

$$\nabla[K\nabla T(r, z, t)] + Q_g = \rho C_p \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

A Eq (2.6) mostra que três efeitos são importantes no balanço de energia em qualquer ponto do sólido: o primeiro termo desta equação designa a taxa líquida de calor por condução em cada direção; o segundo a taxa de geração interna de calor; e o terceiro termo, a taxa de acúmulo de calor no corpo ou variação de calor.

2.4 - DIFUSÃO EM SÓLIDOS DE GEOMETRIA ESFEROIDAL

O fenômeno de transferência de calor por difusão em sólidos tem sido estudado por vários pesquisadores em virtude da sua grande aplicação em processos industriais. Soluções analíticas ou numéricas da equação de difusão de calor para vários casos, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante ou do tipo convectiva, para varias geometrias podem ser encontradas na literatura. Contudo

poucos trabalhos relacionam a difusão de calor em corpos esferoidal sendo a forma esferoidal muito comum nos produtos biológicos, como por exemplo, a Castanha -do-Brasil, a banana, grãos e outros.

Dos estudos reportados na literatura somente geometrias limitadas como placa, cilindro e esfera foram usados para resolver problemas de difusão de calor. Dessa forma o presente trabalho abordou o problema de difusão de calor em sólidos de formas geométricas esferoidal prolatas e oblatas com intuito de ser ter o conhecimento da distribuição da temperatura no interior do solido em função da posição e do tempo.

Diversas soluções da equação de difusão sejam analíticas ou numéricas, com coeficiente de difusão constante ou variável e condições de contorno constante (equilíbrio) ou do tipo convectivo, para várias geometrias (paralelepípedo, cilindro e esfera), podem ser encontradas em Carslaw e Jaeger (1959); Luikov e Mikhailov (1965); Luikov (1968); Skelland (1974); Crank (1992). Para corpos de forma elíptica, podem ser citados Niven (1880); Normiton e Blackwell (1964); Haji-Sheikh e Sparrow (1966); Haji-Sheikh e Sparrow (1967); Zienkiewicz e Parekh (1970); Sokhansanj (1980); Wrobel e Brebbia (1981); Haji-Sheikh (1986); Elvira (1990); Haghighi *et al.* (1990); Sarker *et al.* (1994); Lima *et al.* (1997); Silva (2001); Cardoso (2004).

Haji-Sheikh e Sparrow (1966) apresentam uma solução analítica para condução de calor transiente em corpos esferoidais prolatos para o caso de temperatura constante na superfície usando o método de separação de variáveis. Resultados das temperaturas no centro e no ponto focal são apresentados para vários esferóides.

Haji-Sheikh e Sparrow (1967) apresentam uma solução numérica para a temperatura no interior de corpos esferoidais, assumindo condição de contorno convectiva e radiativa, e usando o método de Monte Carlo, em coordenadas cartesianas. Os resultados obtidos são comparados com os dados analíticos reportados num trabalho anterior de Haji-Sheikh e Sparrow (1966), obtendo bom ajuste.

Normiton e Blackwell (1964) propõem uma solução formal para transferência de calor transiente de esferóides prolato e oblato com temperatura constante na superfície. A metodologia foi aplicada apenas para calcular numericamente a temperatura ao longo da coordenada radial de um disco circular ao longo do tempo.

Niven (1880) apresenta a solução analítica para o problema de difusão em esferóides, considerando condição de temperatura constante na superfície. Embora utilize poucos termos da série, não apresenta resultados numéricos.

Wrobel e Brebbia (1981) apresentam uma formulação numérica usando o método de elementos de fronteira em coordenadas polares para análise do problema de condução de calor transiente em corpos axialmente simétricos, com condição de contorno de equilíbrio na superfície. Como uma das aplicações, o método é usado para descrever a temperatura no centro de um esferóide prolato. Os resultados são comparados com dados analíticos obtidos por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), e numéricos obtidos pelo uso de elementos finitos, por Zienkiewicz e Parekh (1970). Nestas comparações, ajustes excelentes são obtidos.

Haji-Sheikh (1986) apresenta uma solução da equação de difusão em uma fronteira irregular usando o método de Galerkin e condição de equilíbrio na superfície. Como aplicação, o método foi usado para fornecer a distribuição de temperatura no interior de esferóides. Os resultados numéricos obtidos são comparados com os dados analíticos reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), mostrando excelente concordância.

Elvira (1990) apresenta uma solução numérica para o problema de difusão em corpos elípticos com condição de equilíbrio na superfície, usando um método implícito de direção alternada, em coordenadas polares, com malhas ortogonais e não-ortogonais. Como aplicação, o método foi testado para descrever os processos de umidificação de arroz e batata, apresentando boa concordância com dados experimentais.

Haghighi *et al.* (1990) apresentam uma formulação utilizando o método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor e massa em corpos com simetria axial. O modelo foi usado para simular o processo de secagem de grãos de cevada. Os resultados do modelo ajustaram-se bem aos dados experimentais. Procedimento similar foi utilizado por Sokhansanj (1980) para simular o processo de secagem de grãos de arroz. Em todos os casos foi assumida condição de contorno convectiva.

Em virtude da não-homogeneidade dos produtos biológicos e na tentativa de se aproximar o modelo ao processo físico real, são sugeridas modificações por vários autores tendo por base o modelo de difusão, considerando o material um sólido poroso e incluindo o efeito de transferência de calor.

Lima (1999) apresenta soluções analítica e numérica para o problema de difusão transiente em corpos esferoidais prolatos. A solução analítica da equação de difusão em coordenadas esferoidais prolata considera coeficiente de difusão constante e condição de contorno convectiva. Na formulação numérica, o método de volumes finitos foi

utilizado na discretização da equação de difusão usando uma malha regular. Como aplicação, os modelos foram usados para descrever a transferência de calor e massa durante a secagem de banana.

Silva (2001) apresentou uma formulação utilizando o sistema de coordenadas esféricas para solucionar um problema de transferência de calor num corpo com simetria axial utilizando a técnica da Transformada Integral Generalizada. Os resultados mostraram a possibilidade de se usar essa técnica como uma ferramenta matemática.

Cardoso (2004) analisou a condução de calor em sólidos esféricos através da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT). A modelagem matemática do problema foi realizada assumindo-se que a superfície do esférico pode ser descrita por uma função geral, chamada função de forma, assumindo condição de contorno de primeira espécie na superfície. Resultados numéricos para o campo de temperatura e a temperatura média foram produzidos em sólidos esféricos prolatos para diferentes valores de razão de aspecto (γ), nomeados para $\gamma^{-1} = 0,5; 1,0; 2,0$ e $5,0$.

Lima *et al.* (2004) apresentaram uma modelagem analítica de transferência de massa em sólidos esféricos usando o modelo de difusão. A equação de difusão foi escrita em coordenadas cilíndricas e resolvida usando o método Galerkin com um coeficiente de difusão constante e uma condição de contorno de equilíbrio na superfície do sólido. Resultados da cinética de secagem e distribuição de umidade nos sólidos são apresentados e analisados. Foi verificado que os sólidos com uma maior relação área / volume secam mais rápido. Os resultados obtidos são consistentes para o modelo apresentado e podem ser usadas para resolver problemas de difusão, tais como secagem, umidificação, aquecimento e arrefecimento de sólidos com uma forma que varia de um disco circular de um cilindro infinito, incluindo uma esfera e elipsóides.

Pelegri (2005) utilizou a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para obter a solução de problemas difusivos de natureza parabólica em domínios de geometria elíptica e retangular que apresentavam propriedades termofísicas variáveis. Para facilitar o tratamento analítico, o termo difusivo da equação da energia foi linearizado adequadamente fazendo uso da Transformada de Kirchhoff sobre o potencial de temperatura e as variáveis espaciais foram também convenientemente transformadas para facilitar a aplicação das condições de contorno do problema. Para uma melhor compreensão dos problemas estudados, parâmetros físicos de interesse foram determinados para diversas razões de aspecto. Para a visualização e análise do

comportamento transiente foram construídos, então, diagramas para representação de problemas cujos meios apresentam propriedades com diversos tipos de dependência com a temperatura. Posteriormente, para fins de comparação, os problemas propostos para o presente trabalho foram resolvidos numericamente pela técnica de elementos finitos com o auxílio do programa computacional Ansys®.

Sphaier (2000) apresenta uma solução formal para equações diferenciais parciais em domínios irregulares utilizando o método de transformação integral, introduzindo novas idéias para assim estender a técnica da transformada integral generalizadas (GITT) a problemas em geometrias complexas. Problemas de difusão multidimensionais em geometrias irregulares são resolvidos pela solução do problema de autovalor associado (Sturm-Liouville) naquele domínio, através de expansões baseadas em problemas unidimensionais que carregam as informações do contorno como parâmetros nas variáveis do sistema de coordenadas. Um caso teste bidimensional de solução exata conhecida, relacionado à condução de calor em uma porção de região cilíndrica, é selecionado para verificar e validar a técnica proposta e a implementação simbólico-númerica. Ademais, como teste final para a metodologia introduzida neste trabalho, apresenta-se um exemplo de solução bastante incomum de um problema de difusão em geometria irregular.

2.5 – PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DE SÓLIDOS ESFEROIDAIS

As propriedades termofísicas dos sólidos com geometria esférica são afetadas pelas variações de temperatura e teor de umidade, assim como pela sua composição e porosidade. Desde que nos processos industriais (secagem) o teor de água e temperatura do material podem variar consideravelmente no decorrer do processo, logo pode-se esperar uma variação nos valores das propriedades termofísicas dentro do sólido. Além disso, muitos desses esferóides são heterogêneos e, portanto estas mesmas propriedades podem variar de um ponto para outro dentro do sólido.

Um grande número de referências tem sido encontrado na literatura que fornece valores das propriedades termofísicas para sólidos que apresentam uma geometria esférica, por exemplo, produtos biológicos como frutas, grãos e etc. Dessa forma a Tabela 2.1 apresenta várias propriedades termofísicas para banana bem como as suas respectivas referências que são utilizados em trabalhos.

Tabela 2.1- Propriedades termofísicas da banana.

Especificação	Valor	Referência
Densidade (g/cm^3)	0,98	Sweat (1974)
Condutividade Térmica ($\text{W.m/}^\circ\text{C}$)	0,481 a 27°C	Sweat (1974)
Calor Específico	3,684	Rao (1992)
Difusividade Térmica (m^2/s). 10^{-7}	1,2575 a $5,9^\circ\text{C}$	Ansari e Afaq (1986)

2.6 – A TÉCNICA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Na últimas décadas vários métodos numéricos tem sido utilizados para solucionar problemas difusivos, uma vez que as equações diferenciais parciais que governam esses problemas possuem um alto nível de complexidade, principalmente em casos onde há não-linearidade.

Recentemente, devido os avanços das análises numéricas e das técnicas computacionais, surgem cada vez mais alternativas viáveis para análise de problemas difusivos de grande complexidade. Neste contexto, as técnicas analítico-numéricas surgiram e ganharam destaque na resolução de problemas de engenharia, pois garantem maior confiabilidade nos resultados, diminuição dos custos computacionais e uma boa performance na resolução de problemas não-lineares, não-homogêneo e multidimensionais.

Deste modo, GITT (Cotta 1993 e 1998), é uma técnica matemática analítico-numérica (híbrida) bastante utilizada na literatura, que busca por soluções mais precisas e com um menor custo computacional, além de um maior envolvimento analítico que os métodos numéricos clássicos, uma vez que o processo de transformação integral elimina as derivadas parciais e origina um sistema de equações diferenciais ordinários em apenas uma variável independente.

Segundo Ozisik (1993), a base da GITT, deriva do método clássico de separação de variáveis, ou seja, o par transformada integral necessário para a solução de um dado problema é desenvolvido considerando a representação de uma função arbitrária em termos de autofunções do problema de autovalor.

A GITT apresenta como vantagens a sua aplicação em problemas multidimensional, sem aumento considerável do custo computacional com relação a problemas que envolvem apenas uma variável espacial. Este comportamento ocorre devido à característica híbrida da técnica, em que uma solução analítica é determinada para todas as variáveis independentes envolvidas, menos para uma, à qual a solução é

obtida numericamente, a partir da solução do sistema diferencial ordinário, resultante da transformação integral.

Cotta (1993), em seu trabalho agrupou os problemas resolvidos pela GITT nas seguintes categorias:

- Problemas com coeficientes variáveis na equação.: (Mikhailov, 1975; Cotta, 1987; Cotta, 1992; Cotta, 1993) Esse tipo de problema caracteriza-se por apresentar coeficientes da equação diferencial parcial dependentes também da variável independente que é mantida após a transformação integral (Mikhailov, 1975, Cotta, 1987). Tais problemas surgem nos seguintes casos: na análise transiente de aletas com dissipação dependente do tempo, bem como no escoamento com desenvolvimento simultâneo de velocidade e temperatura, no interior de dutos;

- Problemas com coeficientes variáveis nas condições de contorno: (Özisik e Murra, 1974; Cotta e Santos, 1992; Cotta, 1986). Este tipo de problema ocorre quando os coeficientes na condição de contorno dependem da variável independente não eliminada. Nesta categoria incluem-se a condução de calor com número de Biot dependente do tempo e convecção forçada no interior de dutos externos aletados;

- Problemas com fronteiras móveis: (Özisik e Güçeri, 1977; Cotta, 1986; Aparecido e Cotta, 1990; Aparecido, Cotta e Özisik, 1989). Este tipo de problema acontece nos casos em que a condição de contorno varia com o tempo, ou quando os domínios definidos são irregulares, com relação ao sistema de coordenadas adotado. Como exemplo de problemas de contornos móveis tem-se problemas de mudança de fase e problemas de oxidação; os casos de domínio irregular estão presentes no escoamento de um fluido com transferência de calor no interior de dutos de forma irregular;

- Problemas que envolvem problemas auxiliares complicados: (Cotta e Özisik, 1986; Cotta, Baohua e Heilbron Filho, 1990). Estes são problemas que devido às dificuldades computacionais pertinentes, devem ser evitados, adotando-se alternativamente problemas auxiliares, de tratamentos mais fáceis e que ainda possuam informações do problema original proposto. Os seguintes casos são mais comumente encontrados na literatura: problemas de Sturm-Liouville com uma variável de Transformada de Laplace; problemas de Sturm-Liouville com variáveis complexas; sistemas Sturm-Liouville não separáveis e problemas de autovalor não clássicos. Estes problemas se aplicam, por exemplo, na convecção forçada interna, periódica e transiente; transferência de calor no escoamento em canais, considerando-se a condução axial; transferência de calor; análise de trocadores de calor bitubulares e secagem de meios

porosos capilares. (Cotta e Özisik, 1986; Aparecido e Cotta, 1990; Cotta e Mikhailov, 1993).

- Problemas não-lineares: Segundo Cotta (1994), estes problemas são freqüentemente encontrados em mecânica dos fluidos e transferência de calor. Nesta categoria está incluído grande parte dos problemas práticos da engenharia (Cotta, 1990). Os problemas não-lineares existentes que já foram solucionados através da GITT, separam-se nas seguintes categorias: problemas de difusão, problemas de convecção-difusão, problemas de autovalor, problemas modelados pela equação da camada limite e problemas modelados pelas equações de Navier-Stokes.

Basicamente, a essência da técnica consiste nos seguintes passos para resolução de equações diferenciais parciais por GITT:

- 1 – Escolher o problema auxiliar com base nos termos difusivos da formulação original, que contenham informações a respeito da geometria e da coordenada a ser eliminada;
- 2 – Solucionar o problema auxiliar, obter autofunções, autovalores, normas e propriedade de ortogonalidade;
- 3 – Desenvolver o par transformada-inversa através da propriedade de ortogonalidade;
- 4 – Transformar o sistema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário, infinito e acoplado;
- 5 – Resolver numericamente o sistema diferencial ordinário, depois de truncar o sistema infinito originado na N-ésima linha e coluna, com ordem suficiente para atingir a acurácia prescrita. A solução numérica deve ser obtida através de algoritmos computacionais disponíveis em diversas bibliotecas de sub-rotinas científicas, tais como o IMSL (1991).
- 6 – Utilizar a fórmula de inversão para a construção dos potenciais originais.

A Figura 2.3, mostra as etapas para resolução de uma Equação Diferencial Parcial através da GITT.

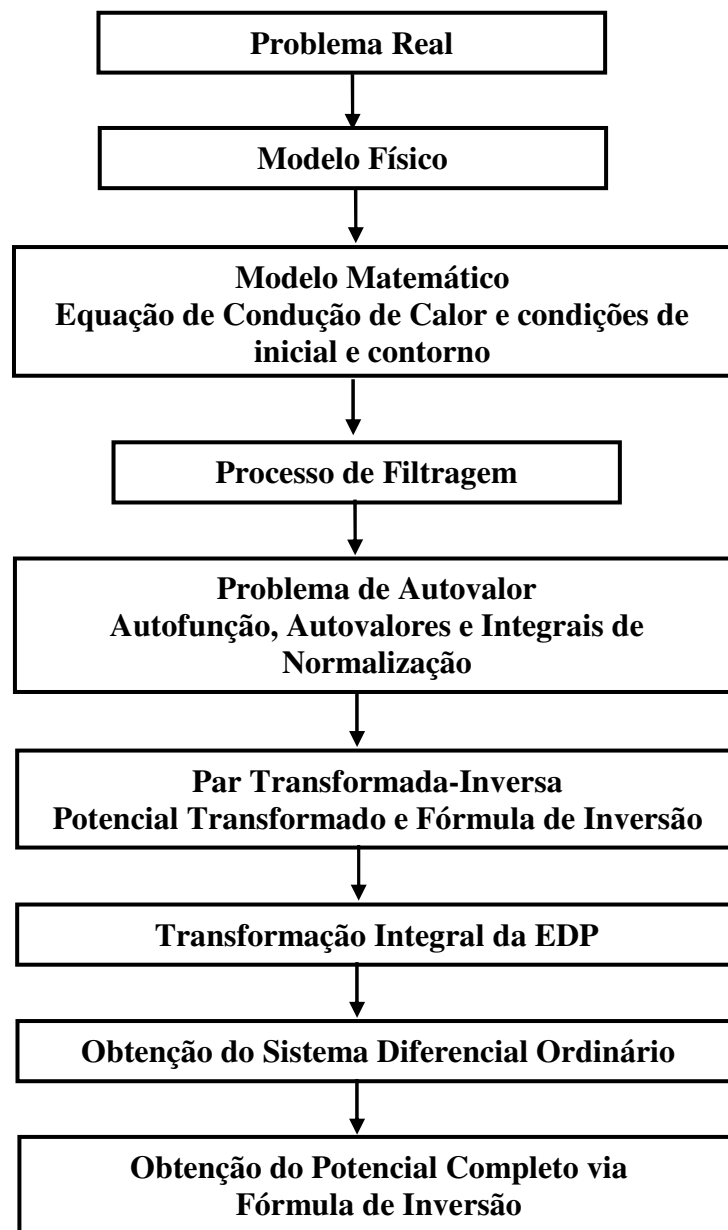


Figura 2.3 – Fluxograma das etapas para resolução de EDPs através da GITT

CAPÍTULO 3

PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Este capítulo apresenta as equações básicas que descrevem o fenômeno de transferência de calor em sólidos de geometria elipsoidal prolato e oblato submetidos a condição de contorno de primeira espécie, além da solução do problema via GITT.

3.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O problema estudado nesta dissertação é descrito fisicamente pela condução de calor transiente em sólidos de geometria elipsoidal, onde suas superfícies são descritas por uma função geral e estão sujeitas as condições de contorno de primeira espécie (condição de Dirichlet) conforme mostrado na Figura 3.1.

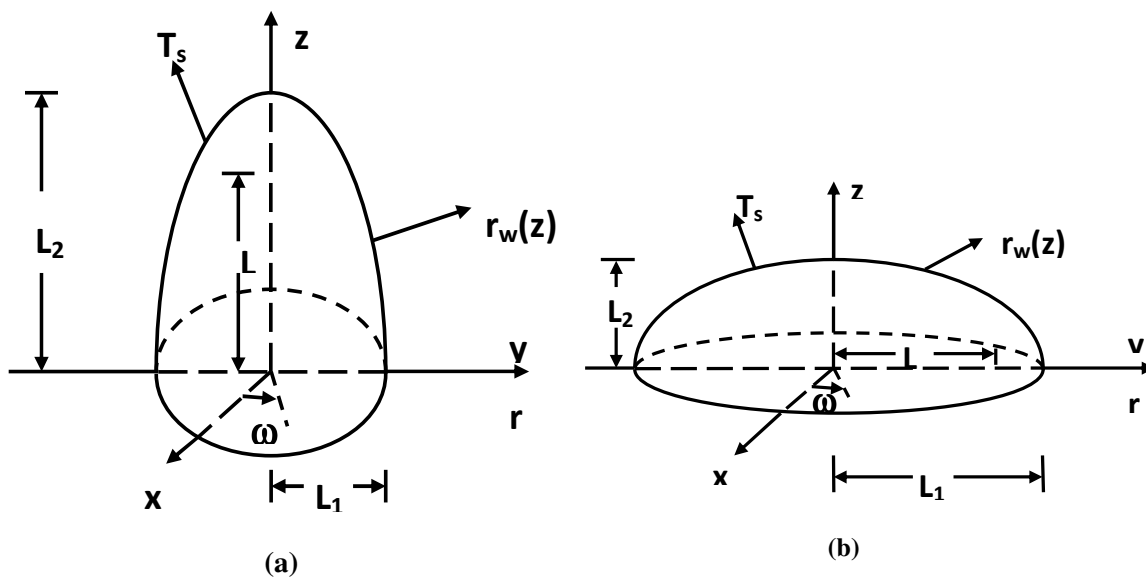


Figura 3.1– Geometria Elipsoidal Prolata (a) e Oblata (b) considerada no problema de condução de calor com condição de contorno de primeira espécie.

Para este problema de difusão de calor foram feitas as seguintes considerações para a construção do modelo matemático: meio difusivo com propriedades termofísicas constantes (massa específica, calor específico, condutividade térmica e difusividade

térmica), sem geração interna de calor, a equação de difusão de calor em regime transiente e em coordenadas cilíndricas bidimensional (direção axial e radial). Portanto, o problema de condução de calor (Figura 3.1), em regime transiente, sem geração interna, fica modelado matematicamente de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} \quad (3.1.a)$$

onde as condições de contorno e inicial para resolução do problema são:

$$T(r, z, 0) = T_o \quad (3.1.b)$$

$$\frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, T(r_w(z), z, t) = T_s, \quad 0 \leq z \leq L_2, \quad t > 0 \quad (3.1.c)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = 0, T(r, L_2, t) = T_s, \quad 0 < r < r_w(z), \quad t > 0 \quad (3.1.d)$$

3.2 – GRUPOS ADIMENSIONAIS

A adimensionalização do problema original permite uma redução no número de parâmetros e a simplificação do sistema de equações, favorecendo uma diminuição do custo computacional quanto à aplicação da GITT na solução do problema.

Para a adimensionalização da Eq. (3.1.a), assim como das condições de contorno e inicial foram utilizadas os seguintes grupos adimensionais:

$$R = r/L_1; \quad Z = z/L_1; \quad \theta(R, Z, \tau) = \frac{T(r, z, t) - T_s}{T_o - T_s}; \quad \tau = \alpha t / L_1^2 \quad (3.2.a-d)$$

$$\gamma = L_2/L_1; \quad R_w(Z) = r_w(z)/L_1 = \sqrt{1 - \frac{Z^2}{\gamma^2}} \quad (3.2.e-g)$$

Arrumando os grupos adimensionais referente às Eqs. (3.2.a-d) e derivando através da regra da cadeia obtemos as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \theta} * \frac{\partial \tau}{\partial t} * \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = (T_o - T_s) \frac{\alpha}{L_1^2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \theta} * \frac{\partial R}{\partial r} * \frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{(T_o - T_s)}{L_1} \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial \theta} * \frac{\partial Z}{\partial z} * \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{(T_o - T_s)}{L_1} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad (3.5)$$

Substituindo as Eqs. (3.3), (3.4) e (3.5) no problema original, a Eq. (3.1.a), em seguida multiplicando esta equação por $L_1^2 / (T_s - T_o)$, obtemos a equação de condução de calor em coordenadas cilíndricas na forma adimensionalizada.

O problema de condução de calor bidimensional apresentado na Figura 3.1, em regime transiente, sem geração interna de calor fica modelado matematicamente com a seguinte equação adimensional:

$$\frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta(R, Z, \tau)}{\partial Z^2}, \quad 0 < Z < \gamma, \quad 0 < R < R_w(Z) \quad (3.6)$$

As condições de contorno e inicial adimensionalizadas são dadas por:

$$\theta(R, Z, 0) = 1 \quad (3.7.a)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Z, \tau)}{\partial R} = 0; \quad \theta(R_w(Z), Z, \tau) = 0; \quad 0 < Z < \gamma; \quad \tau > 0 \quad (3.7.b)$$

$$\frac{\partial \theta(R, 0, \tau)}{\partial Z} = 0; \quad \theta(R, \gamma, \tau) = 0; \quad 0 < R < R_w(Z); \quad \tau > 0 \quad (3.7.c)$$

Onde a variável adimensional $R_w(Z)$ descreve uma função geral que representa a superfície sólida, os valores referentes às várias situações típicas para as razões de aspecto (γ) são definidas como:

$$\begin{cases} \gamma=1, & \text{para esfera} \\ \gamma>1, & \text{para sólido prolato} \\ 0<\gamma<1, & \text{para sólido oblato} \end{cases} \quad (3.8)$$

3.3 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

3.3.1 – PROBLEMA DE AUTOVALOR

O procedimento inicial desta metodologia se dá através de uma análise previa do problema original antes da aplicação do formalismo da GITT. Dessa forma foi verificada a homogeneidade da equação governante do problema difusivo e das condições de contorno, portanto não há a necessidade do uso de filtro na solução.

De modo geral, para a solução de um problema seguindo os preceitos da GITT necessita-se inicialmente da determinação dos problemas de autovalores adequado à solução do problema original. A obtenção do problema de autovalor é um dos passos básicos para a solução de equações diferenciais parciais pela técnica, uma vez que a expansão que será proposta como solução da Eq. (3.6) é baseada nas autofunções obtidas da solução do problema de autovalor.

Portanto, os problemas de autovalores apropriados para o problema de condução de calor em sólidos esferoidais apresentado neste trabalho são obtidos através da aplicação do método de separação de variáveis, onde a solução para $\theta(R, Z, \tau)$ é dada da seguinte forma:

$$\theta(R, Z, \tau) = \Gamma(\tau) \cdot \Psi(R) \cdot \Phi(Z) \quad (3.9)$$

onde: $\Gamma(\tau)$, $\Psi(R)$ e $\Phi(Z)$ são funções de apenas uma variável.

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.6) e em seguida dividindo a mesma por $\Gamma(\tau) \cdot \Psi(R) \cdot \Phi(Z)$, obtemos:

$$\frac{1}{\Gamma(\tau)} \cdot \frac{d\Gamma(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{R \cdot \Psi(R)} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\Psi(R)}{dR} \right] + \frac{1}{\Phi(Z)} \frac{d^2\Phi(Z)}{dZ^2} \quad (3.10)$$

Como cada termo do lado direito da Eq. (3.10) é uma função de apenas uma variável, portanto cada termo é igual a uma constante. Dessa forma o lado direito da equação acima se separa em duas equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R \cdot \Psi(R)} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\Psi(R)}{dR} \right] &= -\mu_i^2 \\ \frac{1}{\Phi(Z)} \frac{d^2\Phi(Z)}{dZ^2} &= -\lambda_\kappa^2 \end{aligned} \quad (3.10.a-b)$$

Seguindo o formalismo da técnica (GITT), os problemas de autovalores com as suas respectivas autofunções e autovalores são definidos a seguir:

- Direção Radial

$$\frac{d}{dR} \left[R \frac{d\Psi_i(R; Z)}{dR} \right] + \mu_i^2(Z) R \Psi_i(R; Z) = 0 \text{ em } 0 < R < R_W(Z) \quad (3.11.a)$$

$$\frac{d\Psi_i(0; Z)}{dR} = 0 \quad \Psi_i(R_W(Z); Z) = 0 \quad (3.11.b-c)$$

onde $\Psi_i(R; Z)$ e $\mu_i(Z)$ - são respectivamente as autofunções e os autovalores do problema de autovalor na direção radial; Z - é um parâmetro no problema de autovalor na direção radial.

A solução analítica para a equação diferencial acima é obtida em termos de funções de Bessel conforme demonstrado abaixo:

Para as equações de Bessel e redutíveis as equações de Bessel, temos a seguinte forma ∇ :

$$(\nabla - a)(\nabla - b)y + p^2 x^{2m} y = 0 \quad (3.12)$$

onde a solução é dada na forma:

$$\begin{cases} y(x) = x^{\frac{a+b}{2}} \left[AJ_n \left(\frac{px^m}{m} \right) + BJ_{-n} \left(\frac{px^m}{m} \right) \right] ; n \neq \text{inteiro} \\ y(x) = x^{\frac{a+b}{2}} \left[AJ_n \left(\frac{px^m}{m} \right) + BY_n \left(\frac{px^m}{m} \right) \right] ; n = \text{inteiro} \end{cases} \quad (3.13)$$

Portanto, colocando a Eq (3.11.a) na forma ∇ da Equação de Bessel, temos:

$$\nabla(\nabla - 1)\Psi_i(R; Z) + \nabla\Psi_i(R; Z) + \mu_i^2(Z)R^2\Psi_i(R; Z) = 0 \quad (3.14.a)$$

onde:

$$\nabla(\nabla - 1) = R^2 \frac{d^2}{dR^2} \quad ; \quad \nabla = R \frac{d}{dR} \quad (3.14.b-c)$$

$$(\nabla - 0)(\nabla - 0)\Psi_i(R; Z) + \mu_i^2(Z)R^2\Psi_i(R; Z) = 0 \quad (3.14.d)$$

$$\begin{aligned} a = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad p^2 = \mu_i^2(Z) \rightarrow p = \mu_i(Z) \\ 2m = 2 \rightarrow m = 1 \quad ; \quad n = \frac{a+b}{2m} = 0 \end{aligned} \quad (3.15.a-e)$$

$$\Psi_i(R; Z) = AJ_0(\mu_i(Z)R) + BY_0(\mu_i(Z)R) \quad (3.16)$$

Aplicando as condições de contorno do problema de autovalor na Eq. (3.16), obtemos as autofunções e a equação transcendental que calcula os autovalores na direção radial.

$$\Psi_i(R; Z) = J_0(\mu_i(Z)R) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
J_0(\mu_i(Z)R_w(Z)) &= 0 \\
J_0(\beta_i) &= 0 \\
\mu_i(Z) &= \frac{\beta_i}{R_w(Z)} ; i = 1,2,3...
\end{aligned}
\tag{3.18.a-c}$$

As autofunções deste problema de autovalor fazem uso da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^{R_w(Z)} R\Psi_i(R;Z)\Psi_j(R;Z)dR = \begin{cases} 0, i \neq j \\ M_i(Z), i = j \end{cases}
\tag{3.19}$$

O cálculo da integral de normalização é definida como:

$$M_i(Z) = \int_0^{R_w(Z)} R\Psi_i^2(R;Z)dR = \frac{R_w^2(Z)}{2} J_1^2(\beta_i)
\tag{3.20}$$

- Direção Axial

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Phi_k(Z)}{dZ^2} + \lambda_k^2\Phi_k(Z) &= 0 \text{ em } 0 < Z < \gamma \\
\frac{d\Phi_k(0)}{dZ} &= 0 ; \Phi_k(\gamma) = 0
\end{aligned}
\tag{3.21.a-c}$$

A solução analítica para a Eq. (3.21.a) fornece a seguinte autofunção:

$$\Phi_k(Z) = \cos(\lambda_k Z)
\tag{3.22}$$

Aplicando as condições de contorno, Eqs. (3.21.b-c), obtemos os autovalores que são calculados pela solução da equação abaixo:

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\gamma}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

A propriedade de ortogonalidade desse problema de autovalor é dada como:

$$\int_0^\gamma \Phi_k(Z) \Phi_l(Z) dZ = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ N_k, & k=l \end{cases} \quad (3.24)$$

O cálculo da integral de normalização é definida como:

$$N_k = \int_0^\gamma \Phi_k^2(Z) dR = \frac{\gamma}{2} \quad (3.25)$$

3.3.2 – DETERMINAÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

A solução para Eq. (3.6) deve ser composta por uma combinação linear de todas as soluções dos problemas de autovalor nas direções radial e axial, além de um potencial na direção τ , conforme mostrado abaixo:

Dessa forma após a determinação dos problemas de autovalores adequados para a solução da equação diferencial de condução de calor o passo seguinte da técnica é o desenvolvimento dos pares transformada-inversa.

$$\theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(R; Z) \cdot A_i(Z, \tau) \quad (3.26)$$

Multiplicando a Eq. (3.26) pelo operador: $\int_0^{R_w(Z)} R \Psi_j(R; Z) dR$ obtém-se:

$$\int_0^{R_w(Z)} R \Psi_j(R; Z) \theta(R, Z, \tau) dR = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(Z, \tau) \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_j(R; Z) \Psi_i(R; Z) dR \quad (3.27)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade na Eq. (3.27), obtemos:

$$A_i(Z, \tau) = \frac{1}{M_i(Z)} \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R; Z) \theta(R, Z, \tau) dR \quad (3.28)$$

Substituindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.26), têm-se:

$$\theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(R, Z) \frac{1}{M_i(Z)} \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R; Z) \theta(R, Z, \tau) dR \quad (3.29)$$

Portanto temos:

$$\begin{cases} \theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(R; Z) \bar{\theta}_i(Z, \tau) \\ \bar{\theta}_i(Z, \tau) = \frac{1}{M_i(Z)} \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R; Z) \theta(R, Z, \tau) dR \end{cases} \quad (3.30.a-b)$$

Definindo um novo potencial:

$$\bar{\theta}_i(Z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(Z) B_{ik}(\tau) \quad (3.31)$$

Multiplicando a Eq (3.31) pelo operador: $\int_0^\gamma \Phi_l(Z) dZ$ obtém-se:

$$\int_0^\gamma \Phi_l(Z) \bar{\theta}_i(Z, \tau) dZ = \sum_{k=1}^{\infty} B_{ik}(\tau) \int_0^\gamma \Phi_k(Z) \Phi_l(Z) dZ \quad (3.32)$$

Aplicando a propriedade de ortogonalidade na Eq. (3.32), obtemos:

$$B_{ik}(\tau) = \frac{1}{N_k} \int_0^\gamma \Phi_k(Z) \bar{\theta}_i(Z, \tau) dZ \quad (3.33)$$

Substituindo a Eq. (3.33) na Eq. (3.31), têm-se:

$$\bar{\theta}_i(Z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(Z) \frac{1}{N_k} \int_0^\gamma \Phi_k(Z) \bar{\theta}_i(Z, \tau) dZ \quad (3.34)$$

Portanto, temos:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_i(Z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(Z) \bar{\theta}_{ik}(\tau) \\ \bar{\theta}_{ik}(\tau) = \frac{1}{N_k} \int_0^\gamma \Phi_k(Z) \bar{\theta}_i(Z, \tau) dZ \end{cases} \quad (3.35.a-b)$$

Substituindo a Eq. (3.35.a) na Eq. (3.30.a) e a Eq. (3.30.b) na Eq. (3.35.b), determinamos os pares Transformada– Inversa:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{ik}(\tau) = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R \Psi_i(R; Z) \Phi_k(Z) \theta(R, Z, \tau)}{M_i(Z) N_k} dR dZ & \text{Transformada} \\ \theta(R, Z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_i(R; Z) \cdot \Phi_k(Z) \cdot \bar{\theta}_{ik}(\tau) & \text{Inversa} \end{cases} \quad (3.36.a-b)$$

3.3.3 – TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

Após a determinação dos pares Transformada - Inversa, a etapa posterior da GITT consiste na aplicação da transformação integral na equação diferencial parcial de condução de calor na forma adimensionalizada, de modo que as derivadas parciais com dependência espacial sejam eliminadas e fazendo com que a equação diferencial parcial seja reduzida a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

A transformação integral da Eq. (3.6) é feita através da operação da mesma com o operador $\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)/[M_i(Z)N_k]\} dRdZ$, com as propriedades de ortogonalidades na direção radial e axial e a fórmula de inversão. Assim obtém-se a seguinte equação:

$$\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} dRdZ = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial\theta}{\partial R} \right] dRdZ + \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 Z} dRdZ \quad (3.37)$$

$$\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 Z} dRdZ$$

Separando a Eq. (3.37) em termos, obtemos os seguintes termos:

$$\text{Termo 1} = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} dRdZ \quad (3.38)$$

$$\text{Termo 2} = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial\theta}{\partial R} \right] dRdZ \quad (3.39)$$

$$\text{Termo 3} = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 Z} dRdZ \quad (3.40)$$

Substituindo a Eq (3.36.a) no Termo 1 acima, obtém-se:

$$\text{Termo 1} = \frac{d\theta_{ik}(\tau)}{d\tau} \quad (3.41)$$

Resolvendo o Termo 2, Eq. (3.39), por integração por parte, obtém-se:

$$Termo\ 2 = -\int_0^\gamma \frac{\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left[\int_0^{R_w(Z)} R \frac{d\Psi_i(R;Z)}{dR} \frac{\partial \theta}{\partial R} dR \right] dZ \quad (3.42)$$

Do problema de autovalor na direção radial, Eq. (3.11a), obtém-se:

$$\int_0^{R_w(Z)} R \frac{d\Psi_i(R;Z)}{dR} \frac{\partial \theta}{\partial R} dR = \mu_i^2(Z) \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R;Z) \theta(R,Z,\tau) dR \quad (3.43)$$

Substituindo a Eq. (3.43) na Eq. (3.42), têm-se a solução para o Termo 2:

$$Termo\ 2 = -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_i^2 \delta_{ij}}{N_k} \left[\int_0^\gamma \frac{\Phi_k(Z)\Phi_l(Z)}{R_w^2} dZ \right] \theta_{jl}(\tau) \quad (3.44)$$

onde:

$$\int_0^{R_w(Z)} R \frac{\Psi_i(R;Z)\Psi_j(R;Z)}{M_i(Z)} dR = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i=j \end{cases} \quad (3.45)$$

Substituindo a inversa, Eq. (3.36.b), no Termo 3 , obtém-se:

$$Termo\ 3 = \int_0^\gamma \int_0^{R_w^2(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (\Psi_j(R;Z)\Phi_l(Z)) \right] dR dZ \theta_{jl}(\tau) \quad (3.46)$$

Aplicando a derivada do produto em relação a Z na Eq.(3.46) e em seguida organizando o termo, têm-se:

$$\text{Termo 3} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\gamma R_w^2(Z)} \int_0^{\gamma} \frac{R \Psi_i(R; Z) \Phi_k(Z) \Phi_l(Z)}{M_i(Z) N_k} \frac{\partial^2 \Psi_j(R; Z)}{\partial Z^2} dR dZ + \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda_k^2 + \right. \\ \left. 2 \int_0^{\gamma R_w^2(Z)} \int_0^{\gamma} \frac{R \Psi_i(R; Z)}{M_i(Z) N_k} \frac{\partial \Psi_j(R; Z)}{\partial Z} \Phi_k(Z) \frac{d\Phi_l(Z)}{dZ} dR dZ \right\} \equiv \theta_{jl}(\tau) \quad (3.47)$$

Substituindo os termos referentes às Eqs. (3.41), (3.44) e (3.47) na Eq. (3.37) e em seguida fazendo algumas manipulações matemáticas, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para o cálculo do potencial transformado:

$$\frac{d \theta_{ik}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} A_{ijkl} \theta_{jl}(\tau) = 0 \quad (3.48)$$

Onde A_{ijkl} é o coeficiente da Eq. (3.48), sendo definido por:

$$A_{ijkl} = \frac{\delta_{ij} \beta_i^2}{N_k} \int_0^{\gamma} \frac{\Phi_k(Z) \Phi_l(Z)}{R_w^2(Z)} dZ - \int_0^{\gamma} \int_0^{R_w(Z)} \frac{R \Phi_k(Z) \Phi_l(Z) \Psi_i(R; Z)}{M_i(Z) N_k} \frac{\partial^2 \Psi_j(R; Z)}{\partial Z^2} dR dZ \\ - 2 \int_0^{\gamma} \int_0^{R_w(Z)} \frac{R \Psi_i(R; Z)}{M_i(Z) N_k} \frac{\partial \Psi_j(R; Z)}{\partial Z} \Phi_k(Z) \frac{d\Phi_l(Z)}{dZ} dR dZ + \delta_{ij} \delta_{kl} \lambda_k^2 \quad (3.49)$$

$$\int_0^{R_w(Z)} R \frac{\Psi_i(R; Z) \Psi_j(R; Z)}{M_i(Z)} dR = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i=j \end{cases} \\ \int_0^{\gamma} \frac{\Phi_k(Z) \Phi_l(Z)}{N_k} dZ = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k=l \end{cases} \quad (3.50.a-b)$$

A condição inicial para o sistema de equações diferenciais ordinárias é obtida através da transformação integral da Eq. (3.7.a):

$$\overset{\cong}{\theta}_{ik}(0) = \overset{\approx}{f}_{ik} = \int_0^1 \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} dRdZ \quad (3.51)$$

Na Eq. (3.48), cada somatório esta associado com uma expansão em autofunção numa coordenada espacial correspondente, para propósitos computacionais, a solução em série dada pela Eq. (3.48) é, em geral, truncada para um número finito de termos ordenados para computar o potencial $\theta(R, Z, \tau)$. A convergência da solução é verificada comparando-se os valores do potencial obtido com as séries truncadas para diferentes números de termos retidos.

Então cada índice relatado i e k para o campo de temperatura são reorganizados num índice simples p, enquanto os índices j e l são reorganizados num novo índice q. Então as somas duplas associadas são reescritas como. Os critérios para o procedimento de ordenação envolvem a soma dos autovalores em cada sentido conforme mostrado abaixo:

$$\mu_i^2(Z) + \lambda_k^2 \quad ; \quad \mu_j^2(Z) + \lambda_l^2 \quad (3.52)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N^*} \rightarrow \sum_{p=1}^{NT} \quad ; \quad \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N^*} \rightarrow \sum_{q=1}^{NT} \quad (3.53)$$

A versão truncada do sistema (3.48) é agora rescrita em termos destes novos índices como:

$$\frac{d\overset{\cong}{\theta}_p(\tau)}{d\tau} + \sum_{p=1}^{NT} A_{pq} \overset{\cong}{\theta}_q(\tau) = 0 \quad ; \quad p=1,2,\dots,NT \quad ; \quad q = 1,2,\dots,NT \quad (3.54)$$

$$\overset{\cong}{\theta}_p(0) = \overset{\approx}{f}_p \quad (3.55)$$

O sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias, Eq. (3.54), é solucionado por um eficiente algoritmo numérico para problemas de valor inicial através da subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1991). Então, o potencial transformado é obtido, e os valores de interesse práticos são determinados através da fórmula de inversão analítica Eq. (3.36.b), assim como a temperatura média adimensional.

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \theta(R, Z, \tau) dA = \frac{3}{\gamma} \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} R \theta(R, Z, \tau) dR dZ \quad (3.56)$$

ou

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{3}{\gamma} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N^*} \overset{\simeq}{g_{ik}} \overset{\cong}{\theta_{ik}}(\tau)$$

onde : (3.57.a-b)

$$\overset{\simeq}{g_{ik}} = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R; Z) \Phi_k(Z) dR dZ$$

A Eq. (3.57a) é então reescrita em termos do novo índice, segundo a Eq. (3.53), obtendo a seguinte equação:

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{3}{\gamma} \sum_{p=1}^{NT} \overset{\simeq}{g_p} \overset{\cong}{\theta_p}(\tau) \quad (3.58)$$

CAPÍTULO 4

PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE

Este capítulo apresenta as equações básicas que descrevem o fenômeno de transferência de calor em sólidos de geometria elipsoidal prolato e oblato submetidos à condição de contorno de terceira espécie, além da solução do problema via GITT.

4.1 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

O problema é descrito fisicamente pela transferência de calor por condução dentro dos sólidos e na superfície por convecção, onde suas superfícies são descritas por uma função geral e estão sujeitas as condições de contorno de terceira espécie (condição convectiva na superfície) conforme mostrado na Figura 4.1.

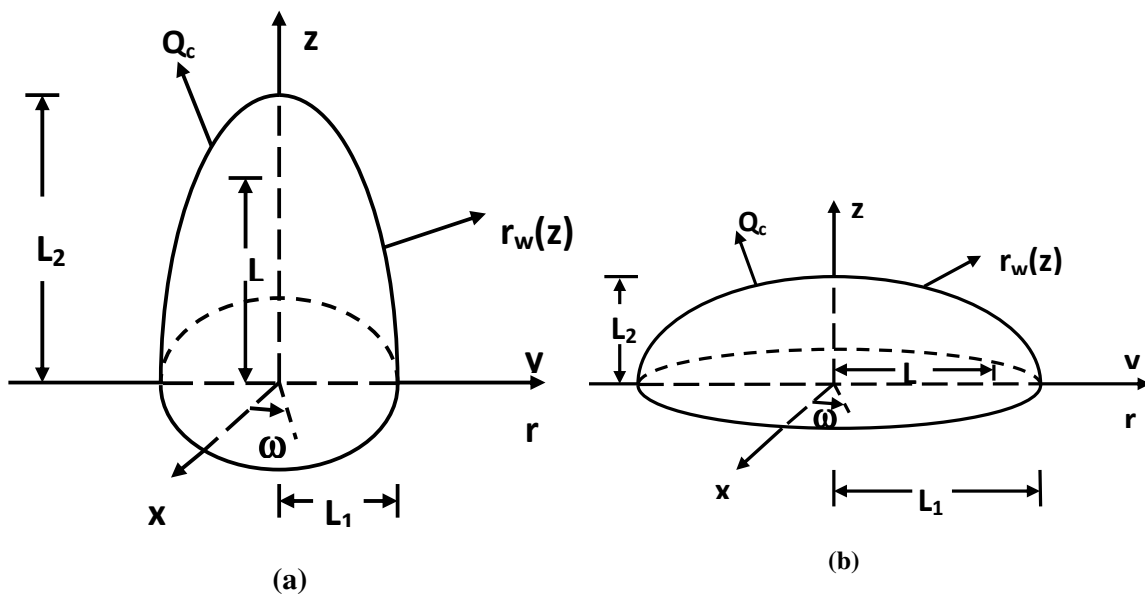


Figura 4.1 – Geometria Elipsoidal Prolata (a) e Oblata (b) considerada no problema de condução de calor com condição de contorno convectiva na superfície.

Para este problema foram feitas as seguintes considerações para a construção do modelo matemático: meio difusivo com propriedades termofísicas constantes, sem geração interna de calor, fluxo difusivo igual ao fluxo convectivo de calor na superfície

do sólido, a equação de difusão de calor em regime transiente e em coordenadas cilíndricas bidimensional (direção axial e radial). Portanto, o problema de condução de calor (Figura 4.1), em regime transiente, sem geração interna, fica modelado matematicamente de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1.a)$$

onde as condições de contorno e inicial para resolução do problema são:

$$T(r, z, 0) = T_o \quad (4.1.b)$$

$$\frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad 0 < z < L_2, \quad t > 0 \quad (4.1.c)$$

$$K \left(n_r \frac{\partial T(r_w(z), z, t)}{\partial r} + n_z \frac{\partial T(r_w(z), z, t)}{\partial z} \right) + hT(r_w(z), z, t) = hT_\infty, \quad 0 < z < L_2, \quad t > 0 \quad (4.1.d)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad 0 < r < r_w(z), \quad t > 0 \quad (4.1.e)$$

$$K \frac{\partial T(r, L_2, t)}{\partial z} + hT(r, L_2, t) = hT_\infty, \quad 0 < r < r_w(z), \quad t > 0 \quad (4.1.f)$$

onde

$$n_r = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + \frac{z^2}{\gamma^4}}}; \quad n_z = \frac{z}{\sqrt{r_s^2 \gamma^4 + z^2}} \quad (4.1.g)$$

4.2 – GRUPOS ADIMENSIONAIS

Para a adimensionalização da Eq. (4.1.a), assim como das condições de contorno e inicial foram utilizadas os seguintes grupos adimensionais:

$$R = \frac{r}{L_1} ; Z = \frac{z}{L_1} ; \theta(R, Z, \tau) = \frac{T(r, z, t) - T_s}{T_o - T_s} ; \tau = \frac{\alpha t}{L_1^2} \quad (4.2.a-d)$$

$$\gamma = \frac{L_2}{L_1} ; R_w(Z) = \frac{r_w(z)}{L_1} = \sqrt{1 - \frac{Z^2}{\gamma^2}} ; B_i = \frac{hL_1}{K} \quad (4.2.e-h)$$

O numero de Biot (B_i) de transferência é definido como sendo a relação entre a resistência interna a condução e a resistência a convecção.

O problema de condução de calor bidimensional apresentado na Figura 4.1, em regime transiente, sem geração interna de calor fica modelado matematicamente com a seguinte equação. adimensional:

$$\frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta(R, Z, \tau)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \theta(R, Z, \tau)}{\partial Z^2}, \quad 0 < Z < \gamma, \quad 0 < R < R_w(Z) \quad (4.3)$$

As condições de contorno e inicial adimensionalizadas são dadas por:

$$\theta(R, Z, 0) = 1 \quad (4.4.a)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Z, \tau)}{\partial R} = 0 ; \quad 0 < Z < \gamma ; \quad \tau > 0 \quad (4.4.b)$$

$$f(Z) \frac{\partial \theta(R_w(Z), Z, \tau)}{\partial R} + g(Z) \frac{\partial \theta(R_w(Z), Z, \tau)}{\partial Z} + B_i \theta(R_w(Z), Z, \tau) = 0 ; \quad 0 < Z < \gamma ; \quad \tau > 0 \quad (4.4.c)$$

$$\frac{\partial \theta(R, 0, \tau)}{\partial Z} = 0 ; \quad 0 < R < R_w(Z) ; \quad \tau > 0 \quad (4.4.d)$$

$$\frac{\partial \theta(R, \gamma, \tau)}{\partial Z} + B_i \theta(R, \gamma, \tau) = 0 ; \quad 0 < R < R_w(Z) ; \quad \tau > 0 \quad (4.4.e)$$

onde

$$f(Z) = \frac{R_w(Z)}{\sqrt{r_s^2 \gamma^4 R_w^2(Z) + \frac{Z^2}{\gamma^4}}}; \quad g(Z) = \frac{Z}{\sqrt{\gamma^4 R_w^2(Z) + Z^2}} \quad (4.4.g)$$

Onde a variável adimensional $R_w(Z)$ descreve uma função geral que representa a superfície sólida, os valores referentes às várias situações típicas para as razões de aspecto (γ) são definidas como:

$$\begin{cases} \gamma=1, & \text{para esfera} \\ \gamma>1, & \text{para sólido prolato} \\ 0<\gamma<1, & \text{para sólido oblato} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.3 – METODOLOGIA DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÃO. DE CONDUÇÃO DE CALOR UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

4.3.1 – PROBLEMA DE AUTOVALOR

Verificou-se a homogeneidade da equação governante do problema difusivo e das condições de contorno, portanto não há a necessidade do uso de filtro na solução.

Portanto, os problemas de autovalores apropriados para o problema de condução de calor em sólidos esferoidais é dado da seguinte forma:

- Direção Radial

$$\frac{d}{dR} \left[R \frac{d\Psi_i(R;Z)}{dR} \right] + \mu_i^2(Z) R \Psi_i(R;Z) = 0 \quad \text{em } 0 < R < R_w(Z) \quad (4.6)$$

$$\frac{d\Psi_i(0;Z)}{dR} = 0 \quad (4.6.a)$$

$$f(Z) \frac{d\Psi_i(R_w(Z); Z)}{dR} + B_i \Psi_i(R_w(Z); Z) = 0 \quad (4.6.b)$$

onde: $\Psi_i(R; Z)$ e $\mu_i(Z)$ - são respectivamente as autofunções e os autovalores do problema de autovalor na direção radial; Z - é um parâmetro no problema de autovalor na direção radial.

A solução analítica para Eq.(4.6) é obtida em termos de funções de Bessel conforme mostrado abaixo:

$$\Psi_i(R; Z) = AJ_0(\mu_i(Z)R) + BY_0(\mu_i(Z)R) \quad (4.7)$$

Aplicando as condições de contorno do problema de autovalor na Eq. (4.7), obtemos as autofunções e a equação transcendental que calcula os autovalores na direção radial.

$$\Psi_i(R; Z) = J_0(\mu_i(Z)R) \quad (4.8)$$

$$\mu_i(Z) f(Z) J_1(\mu_i(Z)R_w(Z)) + B_i J_0(\mu_i(Z)R_w(Z)) = 0 \quad (4.9)$$

As autofunções deste problema de autovalor fazem uso da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i(R; Z) \Psi_j(R; Z) dR = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_i(Z), & i = j \end{cases} \quad (4.10)$$

O cálculo da integral de normalização é definida como:

$$M_i(Z) = \int_0^{R_w(Z)} R \Psi_i^2(R; Z) dR = \frac{R_w^2(Z)}{2} [J_1^2(\mu_i(Z)R_w) + J_0^2(\mu_i(Z)R_w)] \quad (4.11)$$

- Direção Axial

$$\frac{d^2\Phi_k(Z)}{dZ^2} + \lambda_k^2 \Phi_k(Z) = 0 \quad \text{em } 0 < Z < \gamma \quad (4.12)$$

$$\frac{d\Phi_k(0)}{dZ} = 0 \quad (4.12.a)$$

$$\frac{d\Phi_k(\gamma)}{dZ} + B_i \Phi_k(\gamma) = 0 \quad (4.12.b)$$

A solução analítica para a Eq. (4.12) fornece a seguinte autofunção:

$$\Phi_k(Z) = \cos(\lambda_k Z) \quad (4.13)$$

Aplicando as condições de contorno Eqs. (4.12.b-c), obtemos a equação transcendental para cálculos dos autovalores:

$$-\lambda_k \operatorname{sen}(\lambda_k Z) + B_i \cos(\lambda_k Z) = 0 \quad (4.14)$$

A propriedade de ortogonalidade desse problema de autovalor é dada como:

$$\int_0^\gamma \Phi_k(Z) \Phi_l(Z) dZ = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ N_k, & k=l \end{cases} \quad (4.15)$$

O cálculo da integral de normalização é definida como:

$$N_k = \frac{\gamma(\lambda_k^2 + B_i^2) + B_i}{2(\lambda_k^2 + B_i)} \quad (4.16)$$

4.3.2 – DETERMINAÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Após a determinação dos problemas de autovalores adequados para a solução da equação diferencial de condução de calor o passo seguinte da técnica é o desenvolvimento dos pares transformada-inversa.

Portanto temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}_{ik}(\tau) = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)\theta(R,Z,\tau)}{M_i(Z)N_k} dRdZ \quad \text{Transformada} \\ \theta(R,Z,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)\bar{\theta}_{ik}(\tau) \quad \text{Inversa} \end{array} \right. \quad (4.17.a-b)$$

4.3.3 – TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

A transformação integral da Eq. (4.3) é feita através da operação da mesma com o operador $\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)/[M_i(Z)N_k]\} dRdZ$, com as propriedades de ortogonalidades na direção radial e axial e a fórmula de inversão. Assim obtém-se a seguinte equação:

$$\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dRdZ = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] dRdZ +$$

$$\int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} dRdZ \quad (4.18)$$

Separando a Eq. (4.18) em termos, obtemos os seguintes termos:

$$Termo\ 1 = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial\theta}{\partial\tau} dRdZ \quad (4.19)$$

$$Termo\ 2 = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial\theta}{\partial R} \right] dRdZ \quad (4.20)$$

$$Termo\ 3 = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 Z} dRdZ \quad (4.21)$$

Substituindo a Eq (4.17.a) no Termo 1, obtém-se:

$$Termo\ 1 = \frac{d\overset{\equiv}{\theta}_{ik}(\tau)}{d\tau} \quad (4.22)$$

Resolvendo o Termo 2, Eq. (4.20), por integração por parte, obtém-se:

$$Termo\ 2 = - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\gamma \frac{\Phi_k(Z)R_w(Z)g(Z)\Psi_i(R_w;Z)}{M_i(Z)N_k f(Z)} \left[\Phi_l(Z) \frac{\partial\Psi_j(R_w;Z)}{\partial Z} \right] dZ \\ & + \int_0^\gamma \frac{\Phi_k(Z)R_w(Z)N_z\Psi_i(R_w;Z)}{M_i(Z)N_k N_R} \left[\Psi_j(R_w;Z) \frac{d\Phi_k(Z)}{dZ} \right] dZ \\ & + \int_0^\gamma \frac{\mu_i^2(Z)\Phi_k(Z)\Phi_l(Z)M_j(Z)}{M_i(Z)N_k} dZ \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \overset{\equiv}{\theta}_{jl}(\tau) \quad (4.23)$$

onde:

$$\int_0^{R_w(Z)} R \frac{\Psi_i(R;Z)\Psi_j(R;Z)}{M_i(Z)} dR = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i=j \end{cases} \quad (4.24)$$

Substituindo a inversa, Eq. (4.17.b), no Termo 3 , obtém-se:

$$\text{Termo 3} = \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left[\sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (\Psi_j(R;Z)\Phi_l(Z)) \right] dRdZ \overset{\equiv}{=} \theta_{jl}(\tau) \quad (4.25)$$

Aplicando a derivada do produto em relação a Z na equação acima e em seguida organizando o termo, têm-se:

$$\text{Termo 3} = \sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty \left\{ \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left(\Phi_l(Z) \frac{\partial^2 \Psi_j(R;Z)}{\partial Z^2} + \Psi_j(R;Z) \frac{d^2 \Phi_l(Z)}{dZ^2} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \frac{\partial \Psi_j(R;Z)}{\partial Z} \frac{d\Phi_l(Z)}{dZ} \right) dRdZ \right\} \overset{\equiv}{=} \theta_{jl}(\tau) \quad (4.26)$$

Substituindo os termos referentes às Eqs. (4.22), (4.23) e (4.26) na Eq. (4.18) e em seguida fazendo algumas manipulações matemáticas, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para o cálculo do potencial transformado:

$$\frac{d \overset{\equiv}{\theta}_{ik}(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty B_{ijkl} \overset{\equiv}{\theta}_{jl}(\tau) = 0 \quad (4.27)$$

Onde B_{ijkl} é o coeficiente da Eq. (4.27), sendo definido por:

$$B_{ijkl} = \int_0^\gamma \frac{\Phi_k(Z)R_w g(Z)\Psi_i(R_w;Z)\Phi_l(Z)}{M_i(Z)N_k f(Z)} \left[\Phi_l(Z) \frac{\partial \Psi_j(R_w;Z)}{\partial Z} + \Psi_j(R_w;Z) \frac{d\Phi_k(Z)}{dZ} \right] dZ \\ + \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left[\Phi_l(Z) \frac{\partial^2 \Psi_j(R_w;Z)}{\partial Z^2} + \Psi_j(R_w;Z) \frac{d^2 \Phi_l(Z)}{dZ^2} \right] dRdZ \\ + 2 \int_0^\gamma \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} \left[\frac{\partial \Psi_j(R;Z)}{\partial Z} \frac{d\Phi_l(Z)}{dZ} \right] dRdZ - \delta_{ij} \int_0^\gamma \frac{M_j(Z)\mu_i^2 \Phi_k(Z)\Phi_l(Z)}{M_i(Z)N_k} dZ \quad (4.28)$$

A condição inicial para o sistema de equações diferenciais ordinárias é obtida através da transformação integral da Eq. (4.4.a):

$$\theta_{ik}^{\equiv}(0) = f_{ik}^{\approx} = \int_0^{\gamma} \int_0^{R_w(Z)} \frac{R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z)}{M_i(Z)N_k} dRdZ \quad (4.29)$$

Na Eq. (4.27), cada somatório esta associado com uma expansão em autofunção numa coordenada espacial correspondente, para propósitos computacionais, a solução em série dada pela Eq. (4.27) é, em geral, truncada para um número finito de termos ordenados para computar o potencial $\theta(R, Z, \tau)$. A convergência da solução é verificada comparando-se os valores do potencial obtido com as séries truncadas para diferentes números de termos retidos.

O sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias, Eq. (4.27), é solucionado por um eficiente algoritmo numérico para problemas de valor inicial através da subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1991). Então, o potencial transformado é obtido, e os valores de interesse práticos são determinados através da fórmula de inversão analítica Eq. (4.17.b), assim como a temperatura média adimensional.

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \theta(R, Z, \tau) dA = \frac{3}{\gamma} \int_0^{\gamma} \int_0^{R_w(Z)} R\theta(R, Z, \tau) dRdZ \quad (4.30)$$

ou

$$\theta_{av}(\tau) = \frac{3}{\gamma} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N^*} g_{ik}^{\approx} \theta_{ik}^{\equiv}(\tau)$$

Onde: (4.31.a-b)

$$g_{ik}^{\approx} = \int_0^{\gamma} \int_0^{R_w(Z)} R\Psi_i(R;Z)\Phi_k(Z) dRdZ$$

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Resultados numéricos para os campos de temperatura foram obtidos no interior dos sólidos esferoidais oblato/prolato como função das variáveis radial, axial e temporal. A solução foi obtida pela GITT, utilizando a equação de difusão de calor em um sistema de coordenadas cilíndricas.

Um código computacional foi desenvolvido na linguagem de programação FORTRAN 90/95 e implementado em uma plataforma computacional Core 2 Duo 2.2-GHz do Laboratório de Simulação de Processos da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal do Pará (LSP/FEQ/UFGPA). A subrotina DIVPAG da Biblioteca IMSL (1991) foi utilizada para resolver o sistema acoplado de EDOs para os potenciais transformados, dado pela Eq. (3.54) para o problema de condução de calor com condição de primeira espécie e Eq. (4.27) para o problema com condição de terceira espécie, com um erro relativo prescrito pelo usuário de 10^{-8} . Os valores de interesse práticos $\theta(R, Z, \tau)$ e a temperatura média adimensional são determinados através da fórmula de inversão analítica, Eqs. (3.36b) e (4.17b) e as Eqs. (3.58) e (4.31a), respectivamente.

Os resultados numéricos para o campo de temperatura e a temperatura média foram calculados para diferentes valores de razão de aspecto (γ). Neste trabalho, utilizaram-se os seguintes valores: $\gamma = 1,0$ para sólido esférico, $\gamma = 0,2 ; 0,5 ; 0,7$ para sólidos esferoidais oblato e $\gamma = 1,1 ; 1,2 ; 1,5 ; 2,0 ; 3,0 ; 5,0 ; \infty$ para sólidos esferoidais prolato. Inicialmente foi realizada uma análise de convergência e em seguida a verificação do modelo via GITT com os resultados reportados na literatura. Alguns dos resultados obtidos no presente trabalho foram comparados com os resultados analíticos fornecidos pelo trabalho de Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

5.1.– PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE PRIMEIRA ESPÉCIE NA SUPERFÍCIE

5.1.1.– ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA E VERIFICAÇÃO DOS RESULTADOS

Nesta análise foi investigado o comportamento da convergência do campo de temperatura para diferentes tempos e posições radiais adimensionais, a análise de convergência foi aplicada para sólidos de geometria esferoidal prolatas que são caracterizados por apresentarem uma razão de aspecto que varia de $\gamma = 1,0$ até $\gamma = \infty$ e para os sólidos de geometria oblata com razão de aspecto de $0 < \gamma < 1$.

Os resultados para o campo de temperatura para os sólidos com diferente razão de aspecto são apresentados na forma de tabela conforme mostrado. A convergência da solução é verificada comparando-se os valores do potencial obtido com as séries truncadas para diferentes números de termos, ou seja, foi observado o progresso de convergência com o aumento da ordem de truncamento (NT).

A Tabela 5.1 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 0,5$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,05$.

Tabela 5.1 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 0,5$ em ($Z = 0,05$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
NT/R	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
200	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
300	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
400	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
500	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
600	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
700	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
800	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
900	0,00505	0,00353	0,00083	0,00010	0,00007	0,00002
NT/R	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
200	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
300	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
400	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
500	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
600	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
700	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
800	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
900	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Para os instantes de tempo analisados verificou-se na Tabela 5.1 uma rápida convergência da solução para todos os pontos radiais avaliados. Para $\tau = 0,31$ observa-se excelentes taxas de convergência com três algarismos significativos com $NT = 100$ termos. Para $\tau = 0,51$ verifica-se excelentes taxas de convergência com dois algarismos significativos para $NT = 100$ termos para o ponto radial $R = 0$ e convergência com um algarismo significativo para $NT = 100$ termos para o ponto radial $R = 0,4$ e $0,8$. Para os instantes de tempo $\tau = 0,71$ e $0,91$, verifica-se uma rápida convergência para a temperatura nos pontos radiais.

A Tabela 5.2 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 0,7$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,07$.

Tabela 5.2 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 0,7$ em ($Z = 0,07$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,03291	0,02419	0,00678	0,00234	0,00172	0,00048
200	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
300	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
400	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
500	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
600	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
700	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
800	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
900	0,03292	0,02420	0,00679	0,00234	0,00172	0,00048
	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
200	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
300	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
400	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
500	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
600	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
700	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
800	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
900	0,00017	0,00012	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000

Para os instantes de tempo analisados $\tau = 0,31$ e $0,51$, na Tabela 5.2, nos pontos radiais $R = 0; 0,4$ e $0,8$, observou-se excelentes taxas de convergência onde os resultados foram alcançados com quatro e três algarismos significativos para NT entre

100 e 200 termos. No instante de tempo $\tau = 0,71$, verifica-se excelentes taxas de convergência com dois algarismos significativos para $NT = 100$ termos, enquanto para $\tau = 0,91$ observa-se uma rápida convergência para $NT = 100$ termos para os pontos radiais avaliados.

A Tabela 5.3 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 1,0$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,1$.

Tabela 5.3 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 1,0$ em ($Z = 0,1$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,09225	0,06989	0,02166	0,01282	0,00971	0,00301
200	0,09228	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
300	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
400	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
500	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
600	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
700	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
800	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
900	0,09227	0,06990	0,02167	0,01282	0,00971	0,00301
	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
200	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
300	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
400	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
500	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
600	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
700	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
800	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006
900	0,00178	0,00135	0,00042	0,00025	0,00019	0,00006

Analisando os resultados para a temperatura na Tabela 5.3, podemos observar excelentes taxas de convergência, de tal forma que os resultados são alcançados com quatro e três algarismos significativos para NT entre 100 e 200 termos para os instantes de tempo $\tau = 0,31$ e $0,51$. Para os instantes de tempo $\tau = 0,71$ e $0,91$ foram verificada excelentes taxas de convergência para os pontos radiais avaliados, sendo alcançadas para $NT = 100$ termos.

A Tabela 5.4 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 3,0$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,3$.

Tabela 5.4 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 3,0$ em ($Z = 0,3$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,23681	0,18438	0,06244	0,06453	0,05026	0,01702
200	0,23677	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
300	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
400	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
500	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
600	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
700	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
800	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
900	0,23678	0,18437	0,06245	0,06452	0,05025	0,01703
	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,01717	0,01339	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
200	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
300	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
400	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
500	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
600	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
700	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
800	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120
900	0,01718	0,01338	0,00454	0,00453	0,00353	0,00120

Analisando a tabela 5.4, pode-se observar excelentes taxas de convergência mesmo para baixas ordens de truncamento ($NT < 200$ termos). Para $\tau = 0,31$ e $0,51$, observa-se valores convergidos com cinco e quatro algarismos significativos para $NT = 200$ termos para os pontos radiais. Para $\tau = 0,71$ e $0,91$ foi verificada uma convergência com quatro e três algarismos significativos é alcançada com $NT = 100$ termos.

A Tabela 5.5 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 5,0$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,5$.

Tabela 5.5 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal com $\gamma = 5,0$ em ($Z = 0,5$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,25312	0,19762	0,06745	0,07508	0,05861	0,02000
200	0,25314	0,19763	0,06745	0,07508	0,05861	0,02000
300	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
400	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
500	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
600	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
700	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
800	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
900	0,25314	0,19763	0,06746	0,07508	0,05861	0,02000
	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
100	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
200	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
300	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
400	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
500	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
600	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
700	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
800	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169
900	0,02194	0,01713	0,00585	0,00635	0,00495	0,00169

Observou-se claramente na Tabela 5.5 as excelentes taxas de convergência, com a ocorrência de valores convergidos com cinco e quatro algarismos significativos alcançados para NT entre 100 e 200 termos, para os instantes de tempo $\tau = 0,31$ e $0,51$. Para $\tau = 0,71$ em $R = 0$ e $0,4$, verifica-se uma convergência com quatro algarismos significativos para $NT = 100$, enquanto para $R = 0,8$ observa-se uma convergência com três algarismos significativos para $NT = 100$ termos. Para o instante de tempo $\tau = 0,91$ foi verificada que convergência para os pontos radiais $R = 0, 0,4$ e $0,8$ é alcançada com $NT = 100$ termos.

A validação do modelo proposto neste trabalho foi feita por uma comparação dos resultados obtidos pela GITT com ($NT = 900$ termos) para a temperatura adimensional nos esferóides prolatos e oblatos com os resultados apresentados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966) e Carmo e Lima (2000).

A Figura 5.1 mostra a comparação do campo de temperatura adimensional no centro dos esferóides prolatos em função do tempo adimensional, obtido pela GITT e os reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

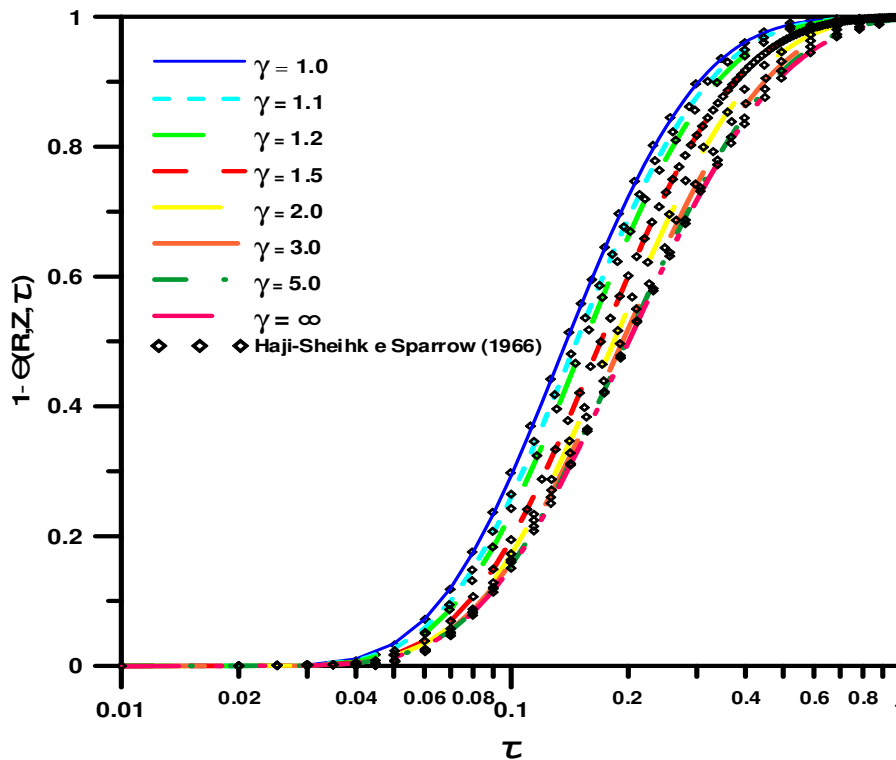


Figura 5.1– Comparação do campo de temperatura no centro dos sólidos esferoidais prolatos com diferentes razões de aspecto que varia de 1,0 a ∞ obtidos pela GITT e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

Pode-se observar da Figura 5.1 uma excelente concordância entre os resultados obtidos pela GITT com os resultados analíticos obtidos Haji-Sheikh e Sparrow (1966) para esferóide prolato com a mesma razão de aspecto. Portanto, fica validada metodologia da GITT através do código computacional desenvolvido.

Como observado na Figura 5.1 a temperatura adimensional no centro do esferóide apresenta um comportamento decrescente à medida que o tempo adimensional aumenta, fato este esperado em virtude da transferência de calor por condução no interior do esferóide ocorrer do centro em direção a superfície. Observa-se, também, que a medida que razão de aspecto do esferóide cresce de $\gamma=1,0$ (esfera) para $\gamma=\infty$ (cilindro infinito), o processo de difusão de calor torna-se mais lento, ou seja, a temperatura adimensional no centro do esferóides diminui de forma mais lenta com um aumento de γ para os sólidos de geometrias prolatas

A Figura 5.2 mostra a comparação do campo de temperatura adimensional no ponto focal dos esferóides prolatos em função do tempo adimensional, obtido pela GITT com (NT = 900 termos) e os reportados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

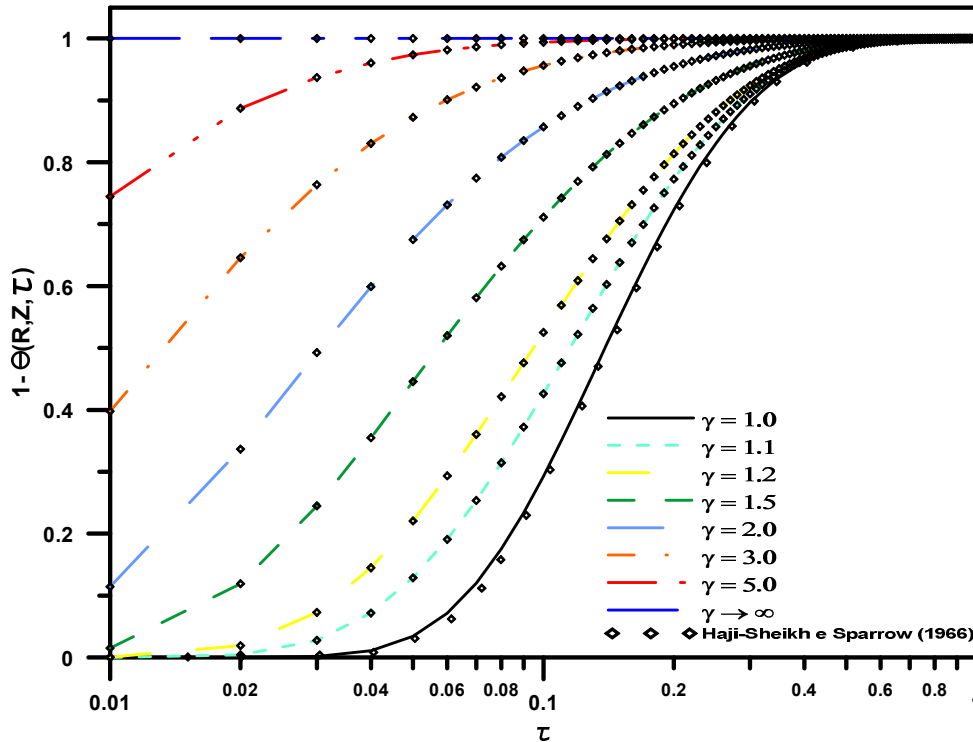


Figura 5.2 – Comparação do campo de temperatura no ponto focal dos sólidos esferoidais prolatos com razão de aspecto que varia de 1,0 a ∞ , obtidos pela GITT e por Haji-Sheikh e Sparrow (1966).

Como mostrado na Figura 5.2, os resultados obtidos pela GITT no ponto focal dos esferóides prolatos com diferentes razões de aspecto apresentam uma excelente concordância com os resultados analíticos reportados na literatura. Além do mais, foi verificado que à medida que a razão de aspecto do esferóide cresce a difusão de calor no ponto focal aumenta, de tal forma que a temperatura adimensional vai diminuindo com o passar do tempo até atingir o equilíbrio com a superfície do sólido. Analisando o comportamento da temperatura adimensional para a esfera ($\gamma = 1$), na Figura 5.2, podemos observar que a temperatura no ponto focal nos instante de tempo iniciais apresenta valores elevados em virtude do ponto focal ser coincidente com centro geométrico do esferóide e no decorrer do processo de transferência de calor a temperatura diminui até atingir o valor das condições de superfície (temperatura prescrita). Observa-se, também, na Figura 5.2 que para o esferóide com forma

cilíndrica ($\gamma = \infty$), verifica-se que a temperatura adimensional no ponto focal apresenta valores nulos em todo o processo de difusão de calor, esse comportamento ocorre devido o ponto focal se deslocar para superfície do cilindro.

Os resultados para a temperatura adimensional obtidos numericamente por Carmo e Lima (2008), para o esferóide com razão de aspecto $\gamma = 0,5$ (esferóide oblato), foram comparados com os resultados obtidos pela GITT no presente trabalho conforme mostrado na Figura 5.3.

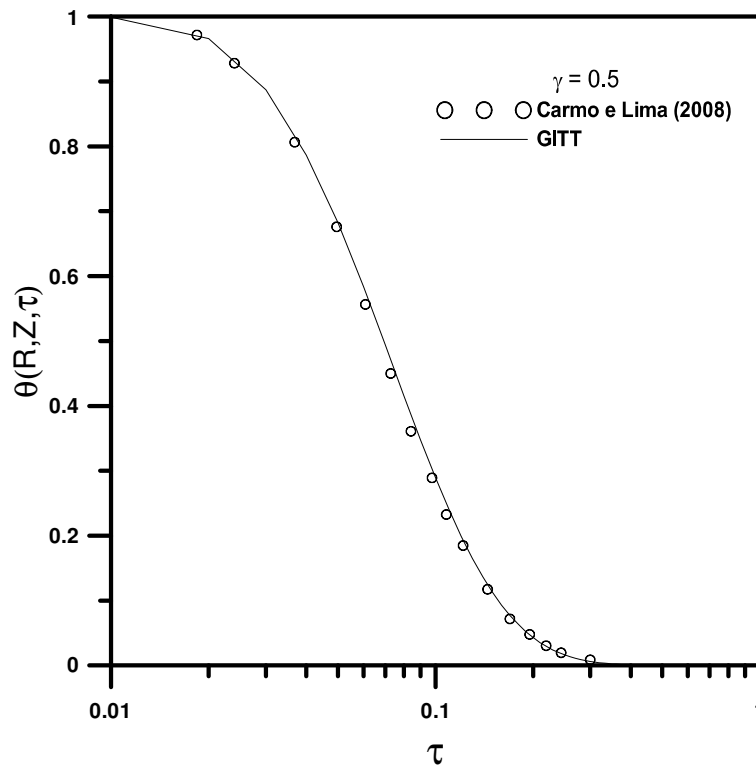


Figura 5.3 – Comparação do campo de temperatura no centro do sólido esferoidal oblato com $\gamma = 0,5$, obtidos pela GITT e por Carmo e Lima (2008).

Pode-se perceber na Figura 5.3 uma boa concordância entre os resultados obtidos pela GITT e os de Carmo e Lima (2008) que utilizou o método numérico de volumes finitos.

Usando os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido no presente trabalho, na Figura 5.4 é apresentado o comportamento da temperatura média adimensional para os diferentes esferóides em função do tempo adimensional. Os valores para a temperatura média plotados nesta figura são para os esferóides com razão de aspecto que variam de $\gamma = 0,2$ até $\gamma = \infty$.

Analisando a Figura 5.4, pode-se verificar que a temperatura média adimensional diminui mais rapidamente para esferóides oblatos quando comparados com esferóides prolatos. De forma mais abrangente, verifica-se que à medida que a razão de aspecto do esferóide decresce a difusão de calor no interior do sólido se torna mais rápida. Portanto, observa-se que a razão de aspecto do esferóide tem influência direta no fenômeno de difusão transiente em corpos de geometrias elipsoidal, isso está diretamente relacionado com a razão área/volume do esferoide.

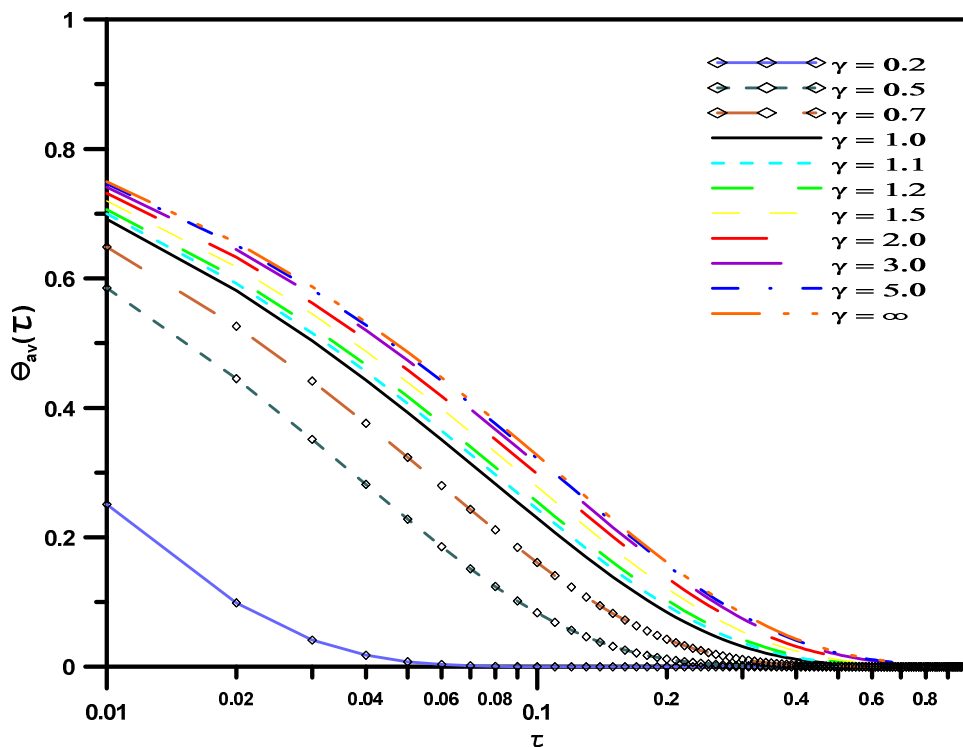


Figura 5.4 – Temperatura média adimensional para vários sólidos esferoidais com razão de aspecto que varia entre $\gamma = 0,2$ a $\gamma = \infty$.

Em uma análise detalhada, pode-se afirmar que quanto maior a razão área/volume do sólido, menor será a resistência térmica do sólido de tal forma que o processo de difusão de calor ocorre de forma mais rápida no seu interior, quando mantidas sob as mesmas condições. Resultados semelhantes também foram obtidos no trabalho de Carmo (2000) com esferóides oblatos, Lima (1999) para esferóides prolato e Lima *et al* (2004). Esse comportamento é observado em processo de resfriamento de sólidos, também em processo de aquecimento e secagem de sólidos.

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram o comportamento do campo de temperatura no interior de um esferóide com $\gamma = 0,5$, para os instantes de tempo $\tau = 0,01; 0,02; 0,05; 0,1$ e $0,2$ em função das coordenada radial R e axial Z, respectivamente.

Podemos observar da Figura 5.5 que no centro do esferóide as temperaturas adimensionais são mais elevadas que na superfície, devido a transferencia de calor esta ocorrendo na direção da superfície do sólido. Pode-se observar que a temperatura adimensional diminui com o aumento da coordenada radial nos instantes de tempo analisados de tal forma que quanto mais próximo da superfície do sólido os valores para temperatura tornam-se menores. Tomando como referência a curva para o instante de tempo $\tau = 0,02$, verifica-se que em $R = 0$, o valor para a temperatura adimensional é aproximadamente 0,96, enquanto que para $R = 0,9$ o valor para a temperatura é aproximadamente 0,22. Outra observação é que a temperatura adimensional diminui com o aumento do tempo adimensional e da coordenada radial. Observa-se, também que os gradientes de temperaturas são menores proximo do centro do esferóide e maiores nas regiões proxima da superfície principalmente nos instantes de tempo iniciais.

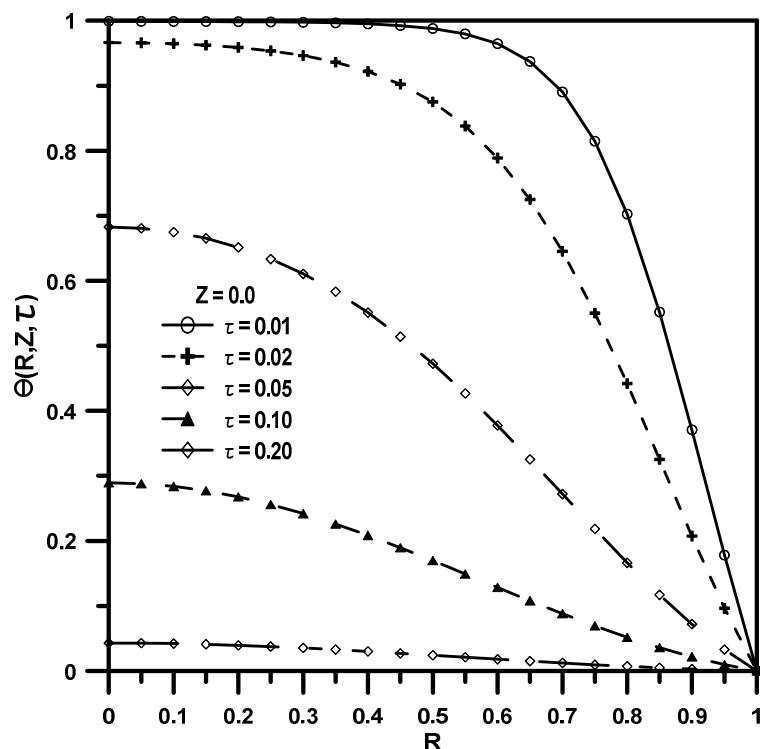


Figura 5.5 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,5$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$.

Na Figura 5.6, são apresentados os resultados para a temperatura adimensional em função da coordenada Z para os mesmos instantes de tempo mostrado na figura anterior em $R = 0$. Observamos na Figura 5.6 um comportamento para campo de temperatura semelhante ao descrito pela Figura 5.5, onde a temperatura adimensional diminui à medida que ocorre um aumento do tempo adimensional e da coordenada Z . Observa-se que os gradientes de temperatura são menores nas regiões mais próximas do centro do sólido e a medida que o calor é transferido na direção da superfície os gradientes de temperatura vão se tornando cada vez maiores. Esse comportamento do campo de temperatura em função dessa coordenada espacial demonstra uma forte dependência da temperatura adimensional com essa coordenada, pois é verificada na Figura 5.6 uma queda mais acentuada para as curvas de temperatura na direção da coordenada Z quando comparada com a direção da coordenada R , principalmente nos instantes de tempos iniciais.

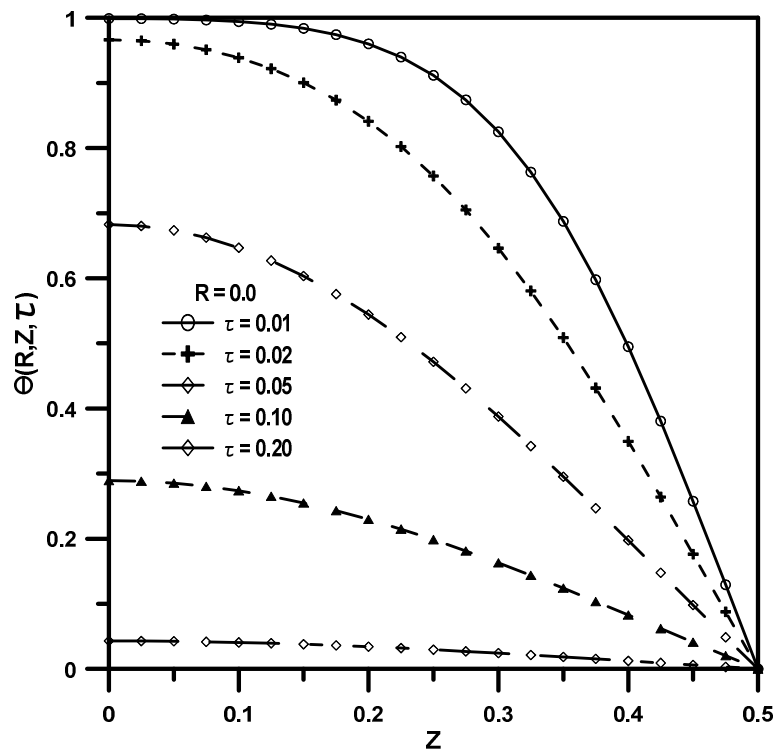


Figura 5.6 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,5$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$.

Nas Figuras 5.7 e 5.8, é analisado o comportamento da distribuição da temperatura adimensional em função das coordenadas espaciais R e Z , referente ao esferóide oblato com razão de aspecto ($\gamma = 0,7$).

A Figura 5.7 mostra a distribuição da temperatura adimensional em função da coordenada radial para os instantes de tempos $\tau = 0,01; 0,02; 0,05; 0,1$ e $0,2$ em $Z = 0$. Analisando as curvas para a temperatura adimensional, observa-se que o comportamento é semelhante ao verificado na Figura 5.5, onde os gradientes de temperatura são menores no centro do esferóide e crescem com o tempo e com a coordenada radial conforme ilustrado na figura abaixo.

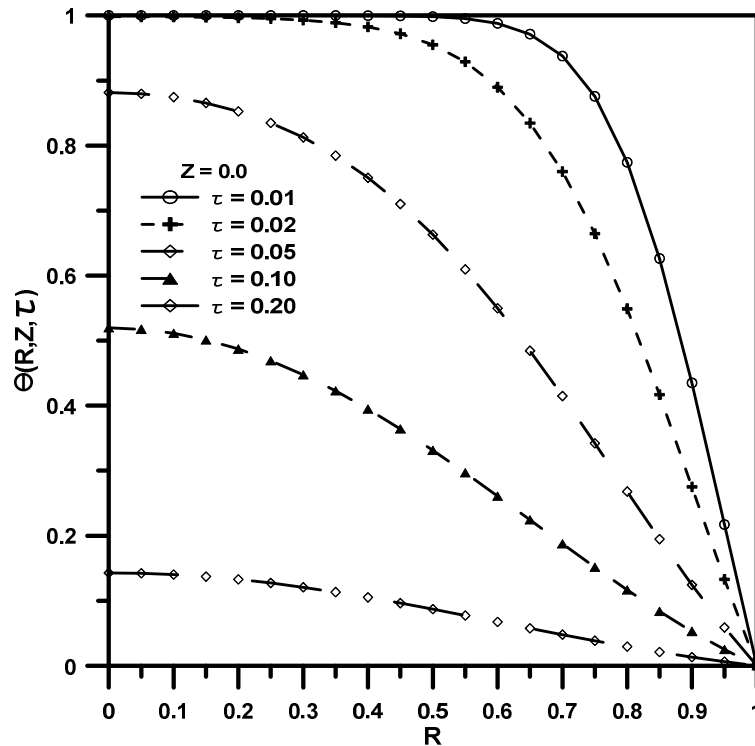


Figura 5.7 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 0,7$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$.

Fazendo uma comparação do comportamento da distribuição de temperatura em função da coordenada radial para o esferóide com razão de aspecto $\gamma = 0,5$ (Figura 5.5), com o comportamento obtido para esferóide apresentado na Figura 5.7, pode-se verificar que distribuição de temperatura no interior do sólido sofre alteração quando o valor de razão de aspecto do esferóide cresce. Analisando as curvas de temperatura nas Figuras 5.5 e 5.7 para o mesmo intervalo de tempo, nota-se que o aumento na razão de aspecto do sólido oblato faz com que a queda da temperatura adimensional nas posições analisadas ocorra de forma mais lenta no decorrer do processo de difusão de calor transiente. Observa-se, também, na Figura 5.7 que para os instantes iniciais $\tau = 0,01$ e

0,02, os gradientes de temperatura são iguais até um determinado valor de R (aproximadamente 0,4) e depois aumentam.

Na Figura 5.8 é analisada a distribuição de temperatura adimensional em função da coordenada axial em $R = 0$. Nesta figura foi observado que os perfis de temperatura no interior do esferóide diminuem de forma mais lenta quando comparado com perfis de temperatura na Figura 5.6 para o mesmo instante de tempo devido o aumento na razão de aspecto do sólido oblato.

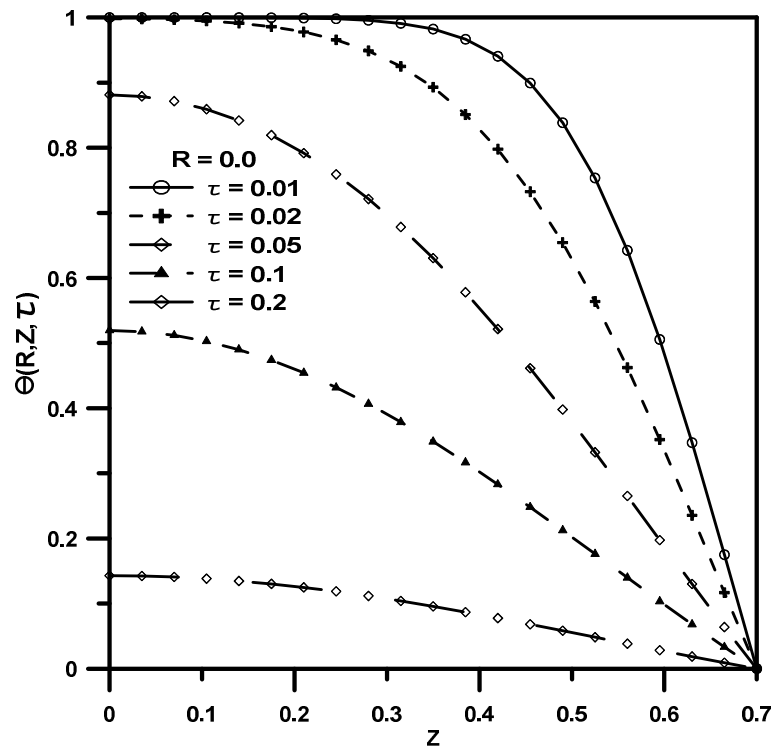


Figura 5.8 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide oblato ($\gamma = 0,7$) em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$.

A Figura 5.9 mostra o campo de temperatura adimensional desenvolvido no interior do esferóide prolato para ($\gamma = 1,0$) na posição ($Z = 0$), em função da coordenada radial e nos instantes tempos $\tau = 0,01$; $0,02$; $0,05$; $0,1$ e $0,2$. Como observado anteriormente os resultados para temperatura apresentam um comportamento semelhante ao verificado nos sólidos de geometria oblata, onde a temperatura diminui à medida que o tempo e a coordenada radial aumentam.

Na Figura 5.10, são apresentados os resultados para a temperatura adimensional em função da coordenada Z para os mesmos instantes de tempos.

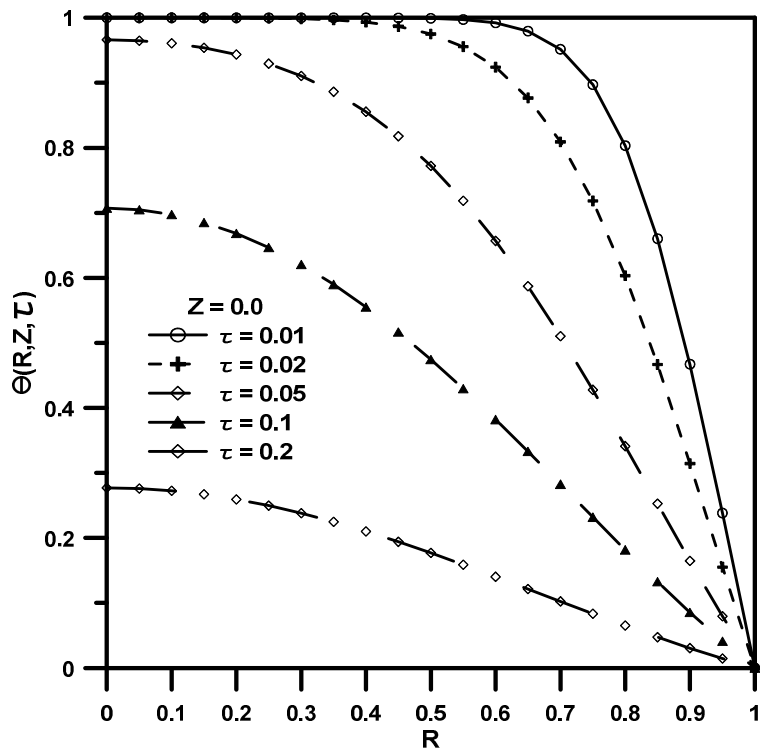


Figura 5.9 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 1,0$ em função da coordenada radial para vários tempos adimensionais e $Z = 0$.

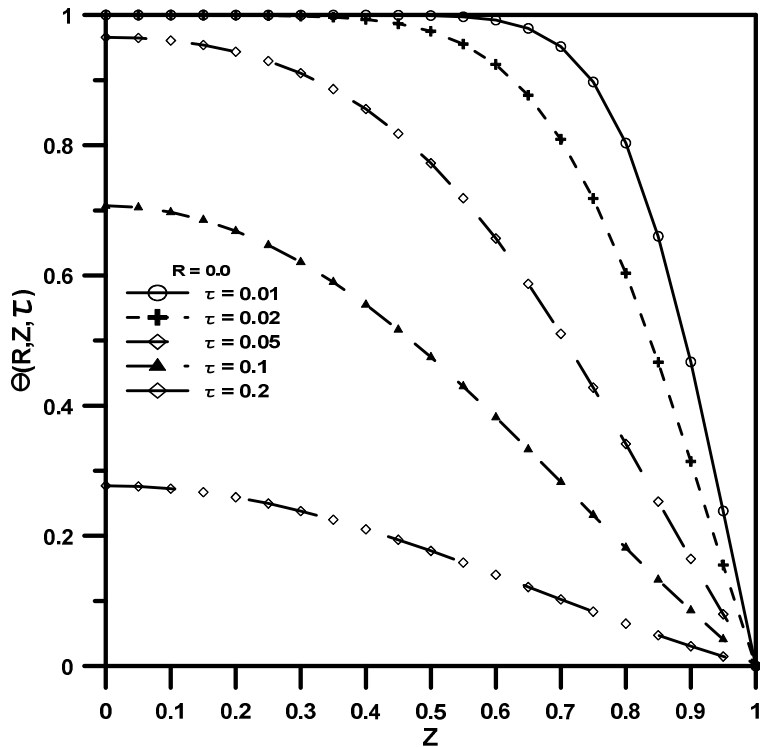


Figura 5.10 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 1,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$.

Fazendo uma análise das curvas de temperatura nas Figuras 5.9 e 5.10, verifica-se que o desenvolvimento da temperatura adimensional para o esferóide prolato, apresenta o mesmo comportamento quando comparados aos perfis de temperatura em função das coordenadas radial e axial nos mesmos instantes de tempo.

As Figuras 5.11 e 5.12 ilustram o desenvolvimento da temperatura adimensional no interior de um esferóide prolato com $\gamma=2,0$, em função das coordenadas radial e axial para os instantes $\tau = 0,01; 0,02; 0,05; 0,1$ e $0,2$. Os resultados apresentam um comportamento semelhante ao verificado para o esferóide prolato com $\gamma=1,0$.

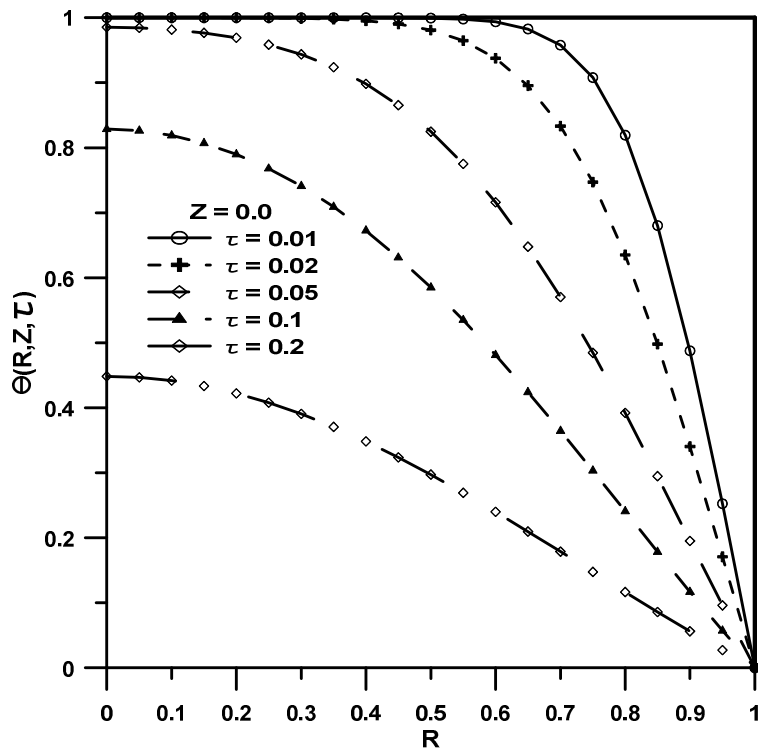


Figura 5.11 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma=2,0$ em função da coordenada R para vários tempos adimensionais e $Z = 0$.

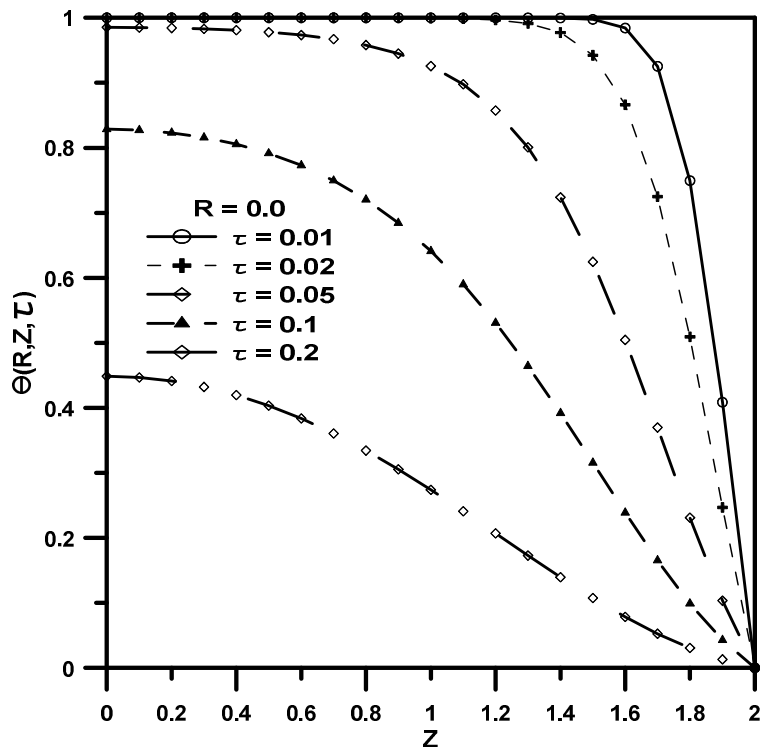


Figura 5.12 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 2,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$.

As Figuras 5.13 e 5.14 mostram o comportamento da distribuição de temperatura no interior de esferóide com $\gamma = 5,0$, para vários instantes de tempo em função das coordenadas R e Z , respectivamente.

Na Figura 5.13, são apresentados os resultados para a temperatura adimensional em função da coordenada radial para vários instantes de tempo em $Z = 0$. Podemos observar que no centro do esferóide as temperaturas são mais elevadas que na superfície, fato este esperado em função da difusão de calor no interior do sólido ocorrer na direção da superfície. Pode-se observar que à medida que o tempo passa os níveis temperatura diminuem em toda região do esferóide e tendem para zero atingindo a condição de contorno da superfície (temperatura prescrita), a qual esta sujeita a temperatura zero. Observa-se, também, nos instantes iniciais que os gradientes de temperatura são menores e à medida que o tempo passa o processo de transferência de calor vai se intensificando em o todo sólido de modo que os gradientes de temperatura aumentam devido à difusão de calor na direção da superfície.

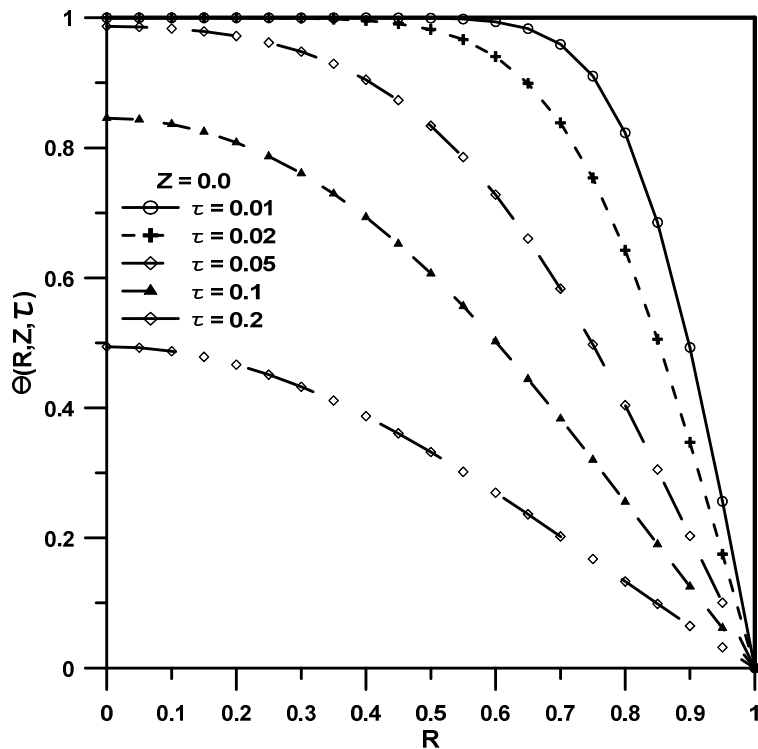


Figura 5.13 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 5,0$ em função da coordenada R para vários tempos adimensionais e $Z = 0$.

Na Figura 5.14, é apresentado o desenvolvimento da temperatura adimensional em relação à coordenada axial para $\tau = 0,01; 0,02; 0,05; 0,1$ e $0,2$. Os resultados apresentaram um comportamento semelhante ao verificado na Figura 5.13, onde se observa uma diminuição da temperatura com aumento da coordenada axial nos instantes tempos. Observa-se, também, que no início do processo de transferência de calor os gradientes de temperatura são menos intenso principalmente na região próxima ao centro do esferóide e à medida que o calor se difunde esses gradientes aumentam até atingir os valores referente a condição de superfície.

Como observado, às curvas para a temperatura adimensional na Figura 5.14 têm o mesmo comportamento das curvas da Figura 5.13, demonstrando a dependência da temperatura adimensional com as coordenadas radial e axial ao longo do tempo. No entanto, para os resultados apresentados pode-se observar que as curvas são mais suave com relação a variação na direção da coordenada axial, indicando que os gradientes de temperatura são menores na direção da coordenada Z, quando comparados com os gradientes na direção da coordenada R. Portanto, para o esferoide com razão de aspecto $\gamma = 5,0$ verifica-se que a dependência da temperatura adimensional com a coordenada

radial é levemente mais forte que a sua dependência com a coordenada axial principalmente nos instantes de tempo iniciais do processo de difusão de calor.

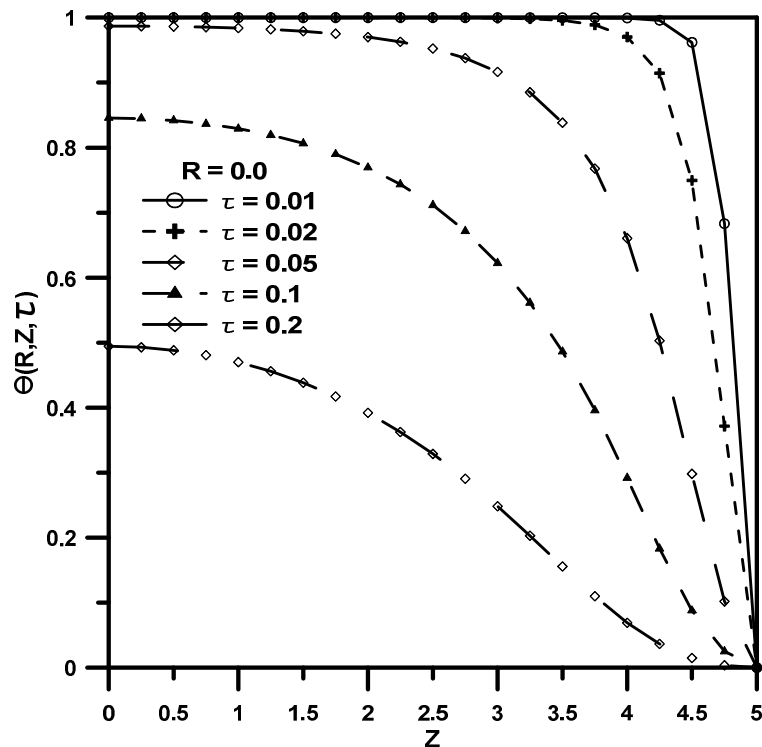


Figura 5.14 – Desenvolvimento da temperatura adimensional no interior do esferóide com $\gamma = 5,0$ em função da coordenada Z para vários tempos adimensionais e $R = 0$.

A Figura 5.15 apresenta as isolinhas de temperatura, obtidas a partir do modelo com condição de contorno de primeira espécie, mostrando a distribuição da temperatura adimensional no interior do esferóide com razão de aspecto $\gamma = 0,5$ em função das coordenadas cilíndricas (R, Z) para os instantes de tempo $\tau = 0,02$ e $\tau = 0,06$ respectivamente.

Analisando as isolinhas de temperatura na Figura 5.15a, pode-se verificar que a temperatura vai diminuindo com aumento da coordenada espacial, indicando que condução de calor vai do centro do esferóide para a sua superfície. Observa-se, também, o comportamento da distribuição de temperatura adimensional no interior do esferóide, onde foi verificado que os gradientes de temperatura são maiores principalmente na direção axial e nas proximidades da superfície do sólido para $\tau = 0,02$.

Ao analisar a Figura 5.15b podemos observar que o campo de temperatura adimensional no esferóide apresenta gradientes de temperatura menores quando

comparados com caso $\tau = 0,02$ (Figura 5.15a) devido o intensificação do processo difusão de calor no interior do sólido.

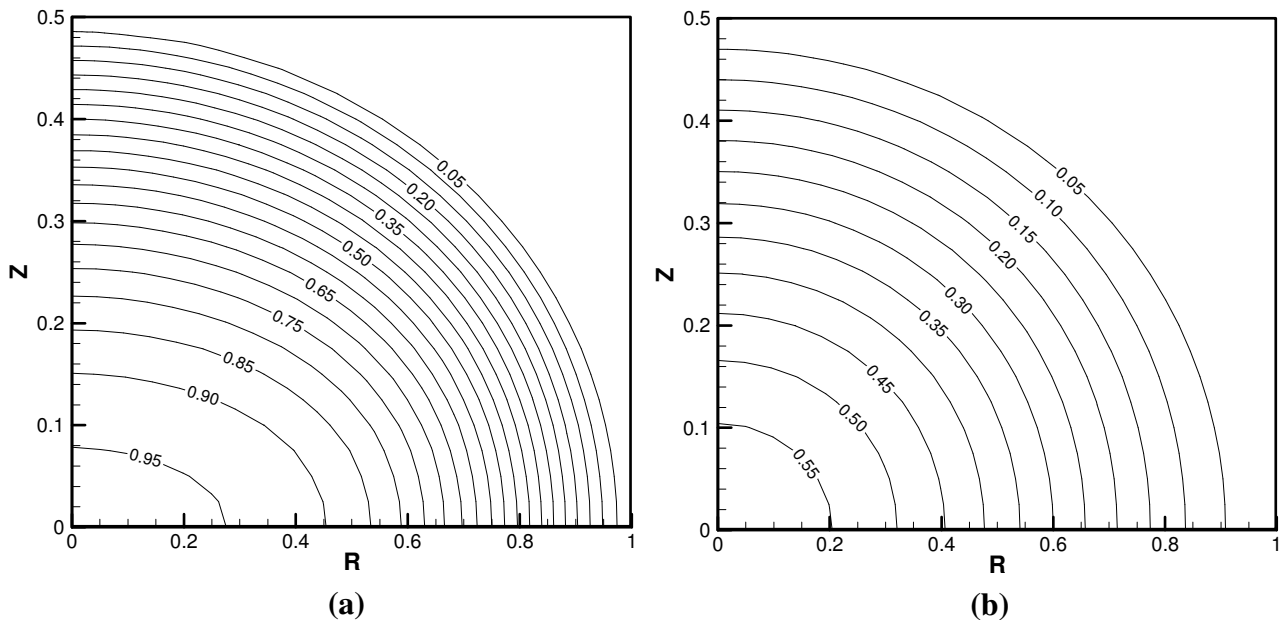


Figura 5.15 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide oblato ($\gamma = 0,5$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,02$ (a) e $\tau = 0,06$ (b).

A Figura 5.16 apresenta as isolinhas de temperatura para esferóide com ($\gamma = 1,0$), obtidas a partir do modelo para o problema difusivo com condição de contorno de primeira espécie, em função das coordenadas cilíndricas (R, Z) para os instantes de tempo $\tau = 0,02$ e $\tau = 0,06$.

Analisando a Figura 5.16a verifica-se que os gradientes de temperatura são maiores na região próxima a sua superfície, enquanto nas regiões próxima ao centro os gradientes são menores. Observando as isolinhas de temperatura na Figura 5.16b pode-se verificar que os gradientes de temperatura são menores quando comparados com as isolinhas da Figura 5.16a, devido à difusão de calor no interior do esferóide.

Fazendo uma comparação das isolinhas de temperatura nas Figuras 5.15 e 5.16 pode-se verificar que o esferóide oblato com razão de aspecto ($\gamma = 0,5$) resfria mais rapidamente que o esferóide prolato com razão de aspecto ($\gamma = 1,0$). Isso é devido à influência direta da relação área/volume do esferóide no processo de transferência de calor, ou seja, quanto maior a relação área/volume mais rápido o sólido resfria. Uma vez que o esferóide oblato apresenta maior relação área/volume quando comparado com esferóide prolato, pode-se afirmar que maior será a velocidade de resfriamento.

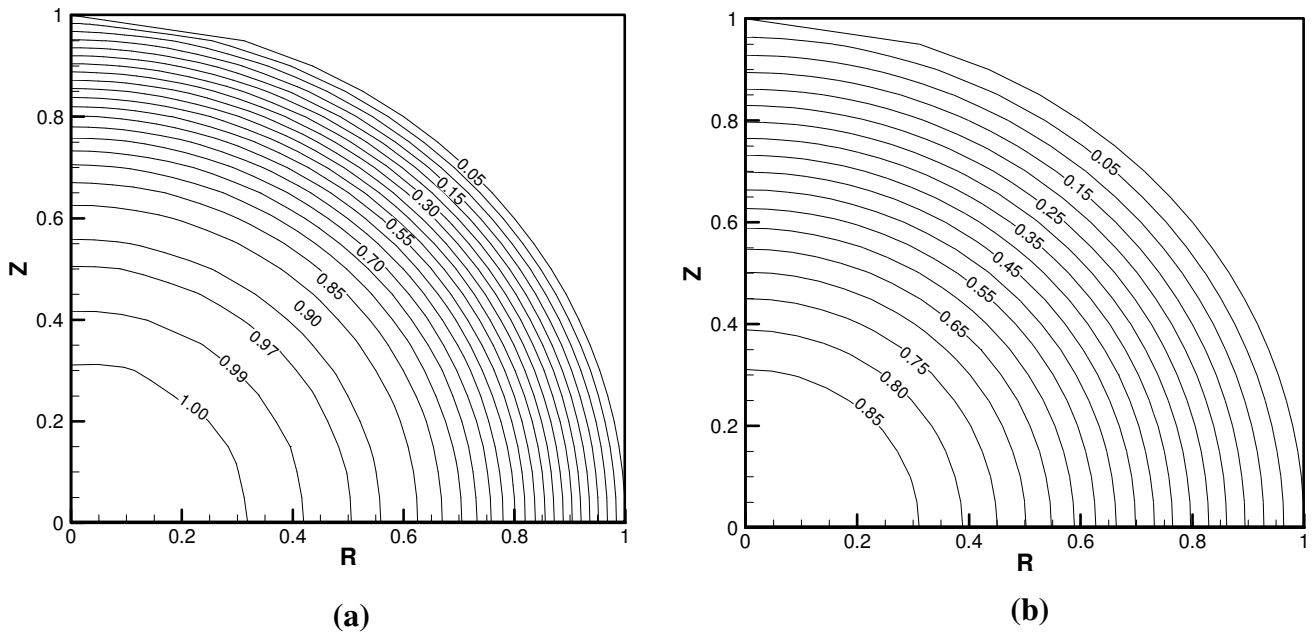


Figura 5.16 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma = 1,0$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,02$ (a) e $\tau = 0,06$ (b).

5.2.- PROBLEMA DIFUSIVO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE TERCEIRA ESPÉCIE NA SUPERFÍCIE DO SÓLIDO

Uma vez obtido e analisado o campo de temperatura para os esferóides submetidos à condição de contorno de primeira espécie (temperatura prescrita), realiza-se o estudo para problema de condução de calor dentro do sólido com condição convectiva na superfície do sólido.

Os resultados numéricos obtidos através da GITT para o campo de temperatura e a temperatura média foram produzidos para os sólidos esferoidais prolatos com os seguintes valores de razão de aspecto ($\gamma = 1,0; 2,0$ e $5,0$) e número de Biot ($Bi = 0,1; 1,0; 10^4$). A subrotina DIVPAG da Biblioteca IMSL (1991) foi usada na solução do sistema de equações diferenciais, Eq. (4.27), para obtenção dos potenciais transformados com ordens de truncamento NT menores quando comparados com problema difusivo, em virtude do alto custo computacional do problema difusivo-convectivo.

A fim de verificar a convergência na presente análise, a Tabela 5.6 apresenta o comportamento da convergência para a temperatura adimensional em função do número

de termos (NT), para o sólido esferoidal com $\gamma = 1,0$ e $Bi = 0,1$ avaliado nas posições radiais $R = 0; 0,4; 0,8$ em $Z = 0,1$.

Tabela 5.6 - Análise da convergência da temperatura adimensional para sólido esferoidal prolato com $\gamma = 1,0$ e $Bi = 0,1$ em ($Z = 0,1$).

$\theta (R, Z, \tau)$						
	$\tau = 0,31$			$\tau = 0,51$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
9	0,72954	0,76508	0,74587	0,58944	0,60909	0,59444
25	0,84198	0,84850	0,84543	0,72719	0,73323	0,73124
64	0,89273	0,88850	0,87747	0,80452	0,80100	0,79157
100	0,90693	0,90191	0,88659	0,82800	0,82365	0,81006
169	0,91667	0,91119	0,89508	0,84615	0,84124	0,82663
225	0,92238	0,91717	0,89924	0,85514	0,85055	0,83414
324	0,92645	0,92140	0,90239	0,86386	0,85825	0,84070
400	0,92856	0,92316	0,90393	0,86959	0,86164	0,84381
625	0,93219	0,92601	0,90594	0,87289	0,86715	0,84842
784	0,93219	0,92601	0,90594	0,87289	0,86715	0,84842
	$\tau = 0,71$			$\tau = 0,91$		
NT/R	0	0,4	0,8	0	0,4	0,8
9	0,46211	0,48493	0,47310	0,36799	0,386091	0,37682
25	0,62824	0,63346	0,63181	0,54277	0,547299	0,54585
64	0,72507	0,72193	0,71347	0,65347	0,650646	0,64302
100	0,75595	0,75110	0,73963	0,69617	0,686567	0,67527
169	0,78105	0,77652	0,76306	0,72093	0,716767	0,70434
225	0,79286	0,78868	0,77343	0,73511	0,731185	0,71710
324	0,80359	0,79931	0,78298	0,74839	0,744405	0,72920
400	0,80872	0,80610	0,78748	0,75471	0,750399	0,73489
625	0,81731	0,81193	0,79441	0,76526	0,760227	0,74382
784	0,81731	0,81193	0,79441	0,76526	0,760227	0,74382

Observou-se claramente na Tabela 5.6, que os resultados não apresentaram boas taxas de convergência, de tal forma que os valores foram convergidos com cinco algarismos significativos para NT entre 625 e 784 termos, para todas as posições radiais apresentadas.

A validação do código computacional para o modelo de difusão de calor transiente com condição convectiva na superfície foi verificada por comparação dos resultados obtidos pela GITT (NT = 784 termos) com resultados numéricos fornecidos por Carmo e Lima (2008).

Os resultados para a temperatura adimensional obtidos numericamente por Carmo e Lima (2008) para o esferóide com razão de aspecto $\gamma = 1,0$ (esferóide prolato) com número de Biot ($Bi = 10^4$) foram comparados com os resultados obtidos pela GITT

para o esferóide prolato ($\gamma=1,0$) com o mesmo número de Biot conforme mostrado na Figura 5.17. Analisando os resultados verifica-se uma boa concordância entre campo de temperatura obtido via GITT e o resultado reportado na literatura.

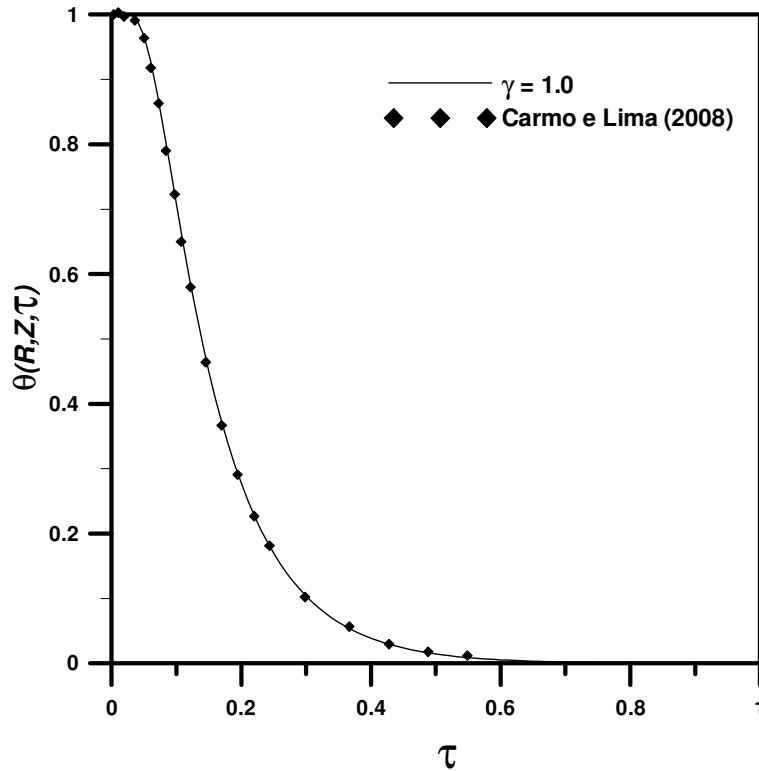


Figura 5.17 – Comparação do campo de temperatura no centro do sólido esferoidal prolato com $\gamma=1,0$ e $Bi = 10^4$, obtidos pela GITT e por Carmo e Lima (2008).

A Figura 5.18 apresenta o comportamento da temperatura média adimensional no interior do esferóide prolato com razão de aspecto igual ($\gamma=1,0$) em função do tempo adimensional para três valores do número de Biot ($Bi = 0,1; 1,0; 10^4$). Analisando as curvas de temperatura para os diferentes valores de Biot, pode-se verificar o efeito do número de Biot na distribuição da temperatura média no interior do esferóide. Assim quanto maior o número de Biot menor será a temperatura média no interior do sólido para um mesmo instante de tempo.

Como observado na Figura 5.18 o número de Biot é um parâmetro de grande importância em problemas de condução de calor transiente que envolvem efeitos convectivo na superfície. Dessa forma observando as curvas de temperatura para esferóide prolato, pode-se verificar que para ($Bi = 0,1$), o processo de transferência de calor ocorre de maneira lenta quando comparado com as curvas para $Bi = 1,0$ e 10^4 . Esse resultado está associado com a interpretação do número de Biot com uma razão de

resistências térmicas, ou seja, valores muito pequeno de Biot indicam que a resistência interna a condução no interior do sólido é pequena se comparada com resistência a transferência de calor por convecção entre o sólido e a sua vizinhança.

Portanto, valores baixos de Biot refletem uma baixa intensidade no processo de transferência de calor. Por outro lado, valores mais altos de Biot, indicam uma maior intensidade no processo de transferência de calor, o que se reflete em altos coeficientes de transferência de calor.

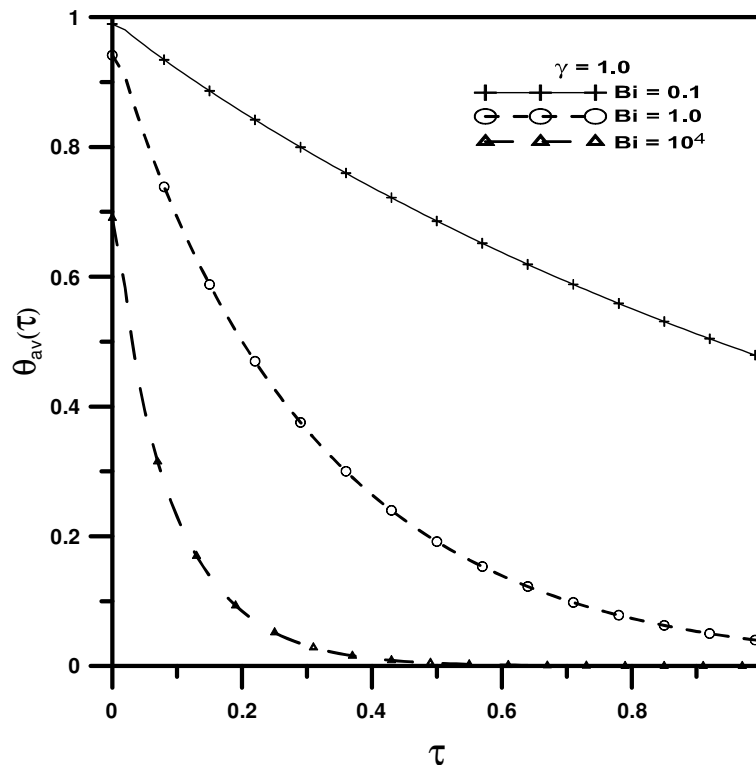


Figura 5.18 – Distribuição da temperatura média adimensional em função do tempo adimensional para vários números de Biot ($Bi = 0,1; 1,0; 10^4$) em um sólido esferoidal prolato com razão de aspecto ($\gamma = 1,0$).

A Figura 5.19 apresenta a distribuição da temperatura adimensional em função das coordenadas cilíndricas (R, Z) para os instantes de tempo $\tau = 0,06, 0,12$ e $0,16$ no interior do esferóide com razão de aspecto ($\gamma = 2,0$) e número de Biot ($Bi = 10^4$) durante o processo de transferência de calor. Analisando a Figura 5.19a no instante de tempo ($\tau = 0,06$) pode-se observar que os gradientes de temperatura são maiores na região próxima a superfície do sólido, enquanto que no centro esses gradientes são menores. Observa-se, também, nas isolinhas de temperatura na Figura 5.19c que a

distribuição da temperatura adimensional no interior do esferóide apresenta gradientes de temperatura menores quando comparado com caso para instante de tempo ($\tau = 0,06$).

Como mostrado na Figura 5.19, o modelo de condução de calor com condição convectiva na superfície do sólido proposto neste trabalho permite, a partir dos resultados gerados, obter a distribuição da temperatura no interior do sólido, podendo assim visualizar o processo de resfriamento, em diferentes instantes de tempo. De forma experimental seria muito complicado poder obter esta distribuição.

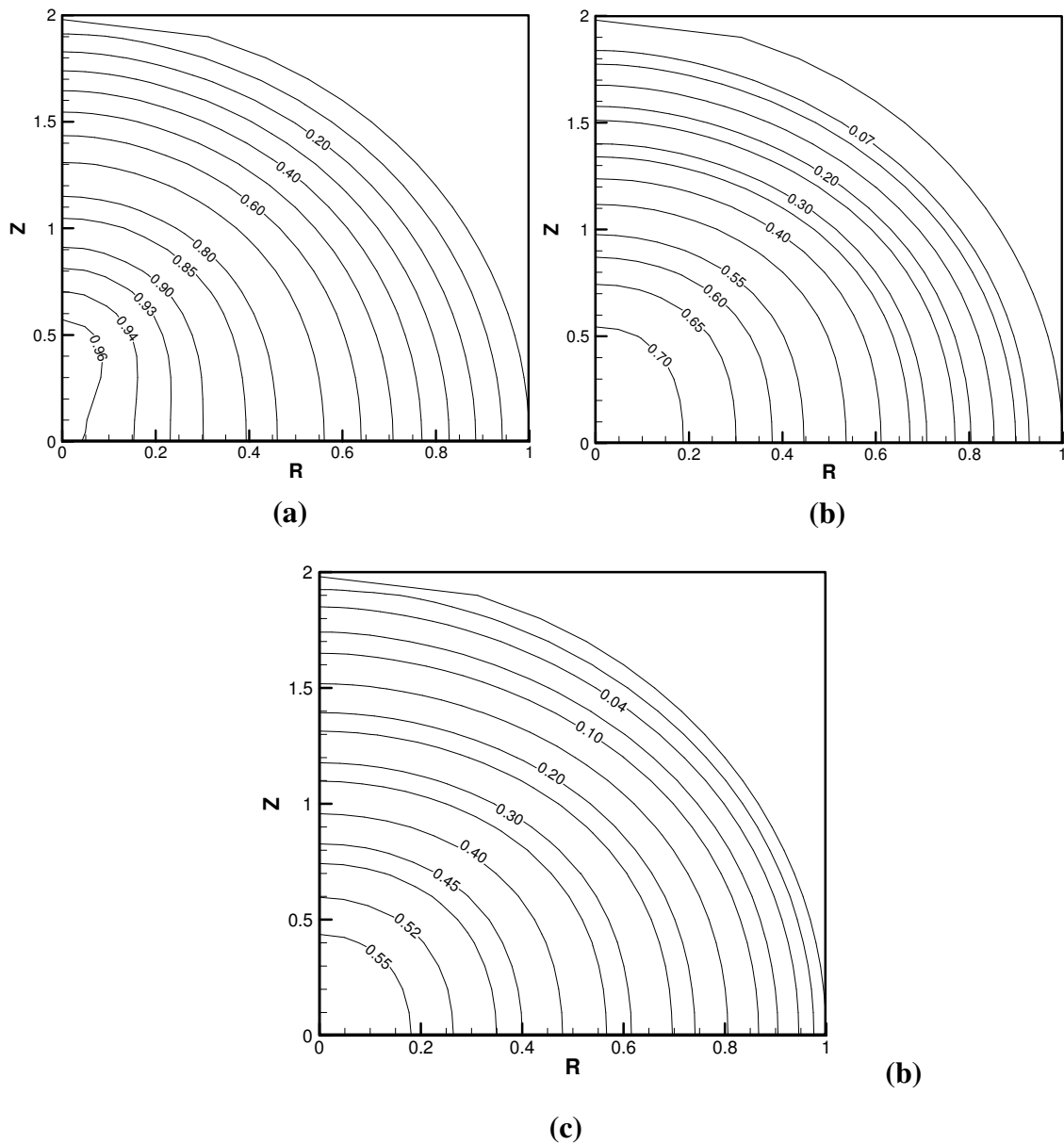


Figura 5.19 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma = 2,0$) e número de Biot ($Bi = 10^4$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,06$ (a), $\tau = 0,12$ (b) e $\tau = 0,16$ (b).

A Figura 5.20 apresenta as isolinhas de temperatura para esferóide com ($\gamma=5,0$), obtidas a partir do modelo para o problema difusivo, em função das coordenadas cilíndricas (R, Z) para os instantes de tempo ($\tau = 0,06; 0,14; 0,18$) e número de Biot ($Bi = 10^4$).

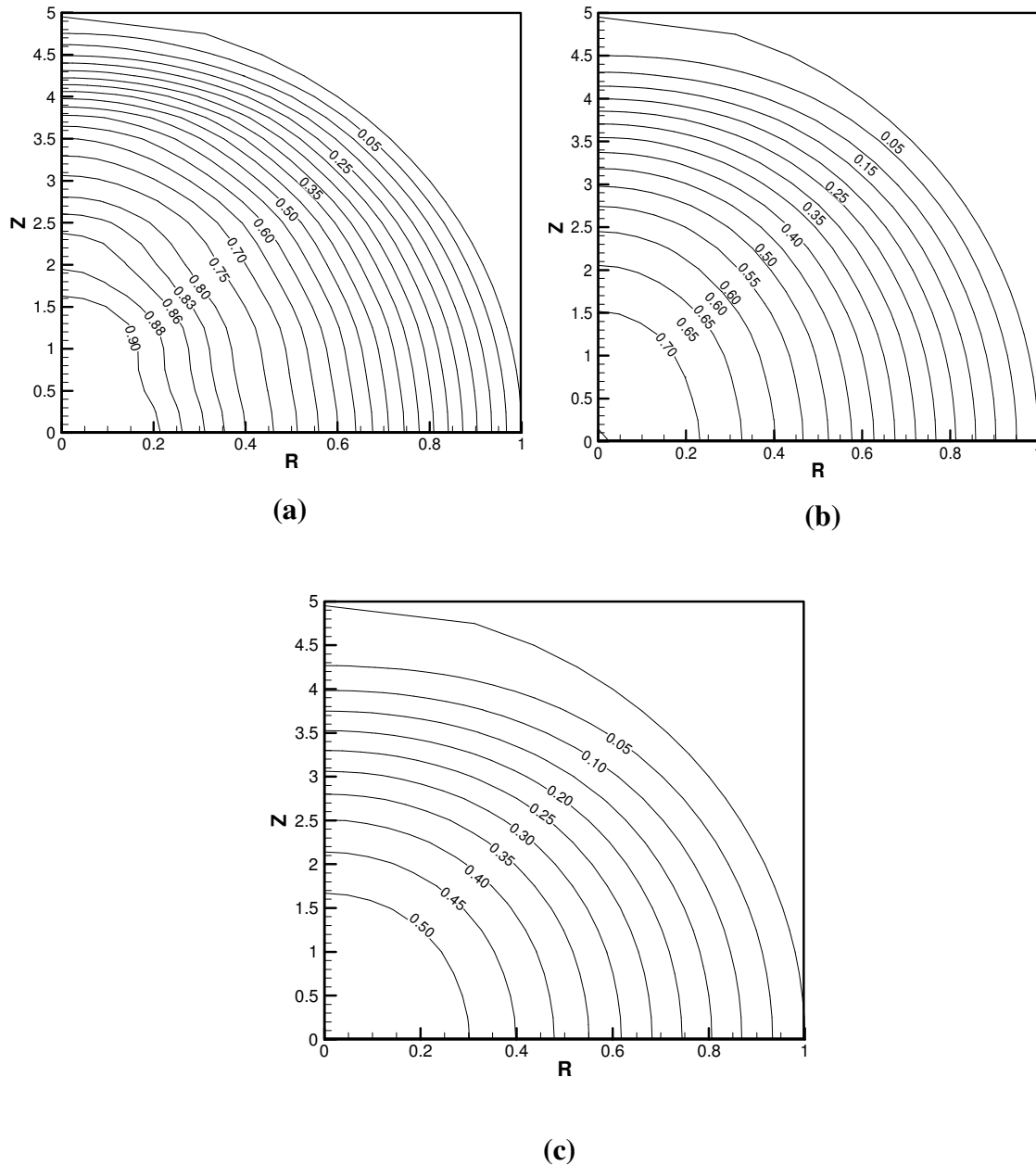


Figura 5.20 – Isolinhas do campo de temperatura adimensional para o esferóide prolato ($\gamma=5,0$) e número de Biot ($Bi = 10^4$) em função das coordenadas cilíndricas (Z, R) em $\tau = 0,06$ (a), $\tau = 0,14$ (b) e $\tau = 0,18$ (c).

Observando a Figura 5.20, pode-se verificar a existência de gradientes de temperatura durante o processo de difusão de calor no interior do esferóide e que os mesmos são maiores nos tempos iniciais para o número de Biot ($Bi = 10^4$). Observa-se, também, a partir das isolinhas de temperaturas que o campo de temperatura adimensional é maior na região próxima ao centro do sólido quando comparado com a região próxima a superfície, evidenciando que o transporte de calor se dá de do interior para fora do esferóide.

Analisando a Figura 5.20, observa-se graficamente que os resultados obtidos pela GITT para a temperatura adimensional não estão totalmente convergidos, pois verificou-se que as isolinhas de temperatura apresentam forma irregular.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Analisou-se no presente trabalho a transferência de calor em regime transiente em corpos com geometria elipsoidal submetidos à condição de contorno de primeira espécie e terceira espécie. Soluções da equação da energia foram obtidas através da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizadas (GITT). Considerando os resultados obtidos da simulação da difusão de calor em corpos esferoidais com diferentes razões de aspecto, pode ser concluir de maneira geral que:

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) utilizada no problema condução de calor transiente em sólidos esferoidais com condição de contorno de primeira espécie apresentou-se como uma solução confiável e com boas taxas de convergência nas simulações realizadas para os casos estudados, enquanto que os resultados para o problema difusivo com condição de contorno convectiva na superfície não apresentaram boas taxas de convergência.

O código computacional desenvolvido para resolver o problema de difusão de calor nos esferóides prolatos e oblatos foi capaz de prever a transferência de calor interna de calor no sólido, bem como o comportamento da distribuição da temperatura adimensional e a temperatura média ao longo do processo.

Para o problema difusivo com condição de contorno de primeira espécie (temperatura prescrita), a metodologia utilizada apresentou resultados excelentes quando comparado com os resultados apresentados por Haji-Sheikh e Sparrow (1966), que apresentaram uma solução analítica para a condução de calor transiente para sólido prolato, e de Carmo e Lima (2008) para o esferóide com razão de aspecto $\gamma=0,5$ (esferóide oblato) submetido à condição de Dirichlet.

Os resultados numéricos para campo de temperatura para modelo difusivo com condição de contorno convectiva na superfície apresentaram uma boa concordância com resultados reportados por Carmo e Lima (2008) para o esferóide prolato, mas foi verificado um elevado custo computacional para o código desenvolvido via GITT.

Além do mais verificou-se que o número de Biot tem uma influência direta no processo de transferência de calor no interior dos sólidos prolato.

Como sugestões para trabalhos futuros propõem-se estudar o processo de difusão de calor em sólidos esferoidal para caso tridimensional, estudar o fenômeno de

difusão de calor em sólidos oblatos assumindo condição de contorno convectiva, incorporar nos modelos apresentados o efeito da transferência de calor por radiação, propor outra solução para o problema de autovalor para caso de difusão de calor com condição de contorno convectiva na superfície e aplicar o modelo apresentado nesse trabalho no processo de resfriamento de produtos biológicos.

REFERÊNCIAS

ANSARI, F. A., AFAQ, A., 1986, "A new method of measuring thermal diffusivity of spherical products". *International Journal of Refrigeration*, v. 9, n.3, p.158-160.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M., 1987, "Fully Developed Laminar Flow in Trapezoidal Ducts", *Anais do IX Congr. Bras. de Eng. Mecânica - IX COBEM*, v.1, pp.25-28.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M.; ÖZISIK, M.N., 1989 "Analytical Solutions to Two-Dimensional Diffusion Problems in Irregular Geometries", *Journal of Franklin Institute*, v.326, pp.421-434.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R. M., 1990, "Thermally Developing Laminar Flow Inside Rectangular Ducts", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 33, pp. 341-347.

APARECIDO, J.B.; COTTA, R.M.; ÖZISIK, M.N., 1990, "Laminar Flow inside Hexagonal Ducts", v. 6, pp.93-100.

CARDOSO, S.A., 2004, *Análise da condução de calor em sólidos esféricos através da Técnica Transformada Integral Generalizada*. 2004. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química)- Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Pará. Belém,

CARMO, J. E. F., LIMA, A. G. B., 2008, "Mass Transfer inside Oblate Spheroidal Solids: Modelling and Simulation", *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 25, pp. 19-26.

CARSLAW, H.S., JAEGER, J.C., 1959, "Conduction of heat in solids." 2 ed. Oxford: University Press, New York, pp.510.

COTTA, R. M., 1986, "Steady-State Diffusion with Space-Dependent Boundary Conditions Parameters", *Proc. of the 1st National Thermal Sciences Meeting, ENCIT-86*, pp. 163-166, Rio de Janeiro, Brasil.

COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N., 1986, "Transient Forced Convection in Laminar Channel Flow with Stepwise Variations of Wall Temperature", *Can. J. Chem. Eng.*, vol. 64, pp. 734-742.

COTTA, R.M.;OZISIK, M. N., 1987, “Diffusion Problems with General Time Dependent Coefficient”, J. Braz. Assoc. Mech. Sciences, vol. 9, nº 4, pp. 269-292.

COTTA, R. M., 1990, “Hybrid Numerical Analytical Approach to Nonlinear Diffusion Problems”, Num. Heat Transfer, part B- Fundamentals, vol. 17, pp. 217-226.

COTTA, R. M., BAOHUA C.; HEILBRON FILHO, P. F. L., 1990, “Analytical Solutions to Transient Convective Mass Transfer within Porous Media”, Proc. of the NATO Advanced Study Inst. – Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, vol.196, pp. 525-540, Turquia.

COTTA, R. M.;CARVALHO, T. M. B., 1991, “Hybrid Analysis of Boundary Layer Equations for Internal Flow Problems”, Proc. of the 7th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar & Turbulent Flow, Parte 1, pp. 106-115, Stanford, CA.

COTTA, R. M.; SERFATY, R., 1991, “Integral Transform Algorithm for Parabolic Problems with Nonlinear Boundary and Equation Source Terms”, Proc. Of the Seventh International Conference on numerical Methods in Thermal Problems, vol. VIII, Part 2, pp. 916-926, Stanford, EUA.

COTTA, R. M., 1992, “Computational Integral Transform Approach in Nonlinear Diffusion and Convection-Diffusion Problems”, Laboratório di Ingegneria Nucleare di Montecuccolino, Série Científica (Invited Lecture), LIN-1202, Università degli Studi di Bologna, Itália.

COTTA, R.M.; LEIROZ, A. J.K.;APARECIDO, J.B.,1992, “Steady-State Diffusion Problems with Variable Equation Coefficients”, International Journal Heat e Technology, vol. 10, n. 3-4, pp. 104.

COTTA, R. M.; PEREZ GUERREIRO, J. S.; SCOFANO NETO, F., 1992, “Hybrid Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations via Integral Transformation”, Proc. of the 2nd. Int. Conf. Advanced Computational Methods in Heat Transfer, “Heat transfer 92”, vol.1, pp. 735-750, Milão, Itália.

COTTA, R. M.; SANTOS, A. C. C., 1992, “Transient Diffusion Problems with Time-Dependent Boundary Condition Coefficients”, Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal, v. 61, n. 5, pp. 829-837 (em Russo): também, J. Eng. Physics vol. 61, n. 5, pp. 1411-1418.

COTTA, R. M., SANTOS, C. F. M. e APARECIDO, J.B., 1993, “Transient Fin Analysis with Time Dependent Surface Dissipation”, Latin American Appl. Research, vol.22, pp. 11-18.

COTTA, R. M., 1993, “A Review of the Integral Transform Method in Non-Linear Heat and Fluid Flow Problems”, Proc. of he 1st. Iberoamerican Congress of Mechanical Engineereng, (Invited Lecture), vol. 1, pp. 35-64, Madri, Espanha.

COTTA, R. M., 1994, "Benchmark Results in Computacional Heat and Fluid Flow: The Integral Transform Method", Int. J. Heat Mass Transfer, (Invited Paper), vol. 37, Sup. 1, pp. 381-394.

COTTA, R.M.; MIKHAILOV, M.D., 1997, "Heat Conduction (Lumped Analysis, Integral Transforms and Symbolic Computation)", John Wiley e Sons, Strasburg, France. To Appear.

COTTA, R.M.,1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering", Begell House , UK.

CRANK, J., 1992, "The mathematics of diffusion". 2 ed., New York: Oxford Science Publications, pp.414.

ELVIRA, C., 1990, "Difusion process modelling in ellipitic shaped bodies". In : International Congress Engineering and Food, London. Proceedings. v. 1, pp.456-464.

GARDNER, A. WILLIAMS., 1971, "Industrial Drying", In: The importance and Scope of Druing in Industry, Gulf Publishing Company, Houston, pp. 1-6.

GEBHART, B., 1993, "Heat conduction and mass diffusion". New York: Mcgraw-Hill, Inc., pp.634.

HAGHIGHI, K.; IRUDAYRAJ.; STROSHINE, R. L.; SOKHANSANJ, S., 1990, "Grain kernel drying simulation using the finite element method". Transaction of the ASAE, v. 33, n. 6, pp. 1957-1965.

HAJI-SHEIKH, A. And SPARROW, E.M., 1966, "Transient Heat Conduction in a Prolate Spheroidal Solid", Journal of Heat Transfer, v. 88, pp. 331-333.

HAJI-SHEIKH, A., "On the Solution of Parabolic Partial Differential Equations Using Galerkin Functions", In: Integral Methods in Science and Engineering, Hemisphere Publishing Corporation, New York, USA, pp. 467-479.

HAJI-SHEIKH, A., 1986, "A Integral methods in science and engineering". New York. Hemisphere Publishing Corporation. Chapter: Onsolution of parabolic partial differential equations using Galerkin functions, pp. 467-479.

HAJI-SHEIKH, A.; SPARROW, E. M., 1966, "Transient heat conduction in a prolate spheroidal solid. Transactions of the ASME": Journal of Heat Transfer, v. 88, n3, pp.331-333.

HAJI-SHEIKH, A.; SPARROW, E. M., 1967, "The solution of heat conduction problems by probability methods. Transactions of the ASAE." Journal of Heat Transfer, v. 89, series C, n.2.

LIMA; A. G. B., 1999, "Fenômeno de difusão em sólidos esferoidais prolatos. Estudo de caso: secagem da banana".243f. Dissertação (Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica), Campinas.

LIMA, A. G. B.; NEBRA, S. A.; ALTEMANI, C. A. C., 1997, "Simulation os the drying kinetics of the silkworm cocon considering diffusive mechanism in elliptical coordinate", In: Inter-American Drying Conference (IADC). Itu. Proceedings. v. B, pp.317-324.

LIMA, A.G.B.; NEBRA, S.A., "The finit-Volume Approach for the Solution of Transient Diffusion Equation Applied to Prolate Spheroidal Solids", Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering-XV COBEM, on CD-ROM, Águas de Lindóia, Brasil.

LIMA, D. R.; FARIAS, S.N.; LIMA, A.G.B., 2004, "Mass transport in Spheroids Using the Galerkin Method .".Brazilian Journal of Chemical Engineering, v 21, pp.667-680.

LUIKOV, A. V.; Mikhailov, Y. A., 1965, "Theory of energy and mass transfer." Oxford: Pergamon Press Ltd., pp. 392.

LUIKOV, A. V., 1968 "Analytical heat diffusion theory". London: Academic Press, Inc Ltd., pp.684.

NIVEN, C., 1880, "On the conduction of heat in ellipsoids of revolution". Philosophical transactions Royal Society, London v. 171, pp.117-1457.

NORMITON, E. J.; BLACKWELL J. H., 1964, "Transient heat flow constant temperature spheriods and the thin circular disk. "The Quarterly Journal of Mechanics and applied mathematics", v.XVII, Part 1, pp.65-72.

MIKHAILOV, M.D., 1975, "On the Solution of the Heat Equation with Time Dependent Coefficient", Int. J. Heat & Mass Transfer, v. 18, pp. 344-345.

MIKHAILOV, M.D.; 1984, ÖZISIK, M.N., "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York.

MIKHAILOV, M. D.; COTTA, R. M., 1990, “Unified Integral Transform Method”, J. Braz. Assoc. Mech. Sciences, RBCM (Invited Paper), vol. 12, nº 3, pp. 301-310.

MIKHAILOV, M.D.; COTTA, R.M., 1997 “Integral Transform Solutions by Using Mathematica”, (To Appear).

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J.,1982, “Calculo:Aplicações da Integral Definida.”,LTC, v.1, pp.350, Rio de Janeiro.

ÖZISIK, M.N.; MURRAY, R.L., 1974, “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions”, **J. Heat Transfer**, v.96, pp.48-51.

ÖZISIK, M. N.; GÜÇERİ, S.I., 1977, “A Variable Eingevalue Approach to the Solution of Phase-Change problems”, **Can. J. Chem. Eng.**, vol. 55, pp. 145-148.

ÖZISIK, M.N., 1993, “Heat Conduction”, 2nd Ed., Wiley Interscience, New York, USA.

PELEGRINI, M.F., 2005, “Aplicação da Técnica da Transformada Integral para Solução de Problemas Difusivos Transientes com Propriedades Termofísicas Variáveis”, 128f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista – Unesp, Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, Brasil.

RAO, M. A., 1992, “Handbook of Food Engineering”. New York Marcel Dekker, pp. 199-246.

SARKER, N. N.; KUNZE, O. R.; STROUBOLIS, T., 1994, “Finite element simulation of rough rice drying”. *Drying Technology*, v. 12, n. 4, pp. 761-775.

SILVA, MARCK DA., 2001, Análise do Campo de Temperatura em Sólidos de Geometria Elipsoidal Via Técnica da Transformada Integral Generalizada. 2001.Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Química)- Instituto de Tecnologia. Universidade Federal do Pará. Belém.

SKELLAND, A. H. P., 1974, “Diffusion mass transfer”. New York: John Wiley & Sons, 510 p.

SOKHANSANJ, S., 1980, “Prediction of heat and mass transfer within a grain kernel – a finite element application”. In: *International Drying Symposium (IDS’80)*, Montreal: Proceedings v.2, pp. 229-232.

SPHAIER, L.A., 2000, “Transformação Integral de Problemas Difusivos em Domínios Irregulares: Computação Mista Simbólico-Númerica”, 184f. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, COPPE, Brasil.

SWEAT, V. E. , 1974, “Experimental values of the thermal conductivity of select fruits and vegetables”. *Journal of Food Science*, v. 39, pp. 1080-1083.

ZIENKIEWICZ, O. C.; PAREKH, C. J., 1970, “Transient field problems: two-dimensional and three-dimensional analysis by isoparametric finite elements”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n.2 ,pp. 61-72.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A., 1981, “A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction”. *International Journal of Heat and Mass transfer*, v.24, n.5, pp. 843-850.